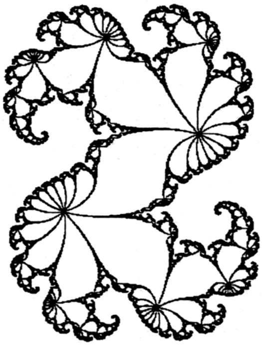
もう一つの
函数論入門

複素数の行動分析の基礎

谷口雅彦 著



京都大学学術出版会

はじめに

> 今日経験が教え得ることは唯一つ、経験が価値を喪失したという事実である。知識の手持札、たとえば学問領域というものが、今日に連なる過去の伝統ぬきに存在できるものであろうか。そして、私が知ることのできるような多くの科学領域にあって、まさしくその伝統なるものが消え失せている。
>
> 『ヘラクレイトスの火』E. シャルガフ

複素平面やリーマン球面の単純な正則自己写像から発生する複素力学系は、フラクタル集合と呼ばれる、多様な「取り扱いにくい」集合を生成する。例えば、縮小相似変換の半群が生成する力学系のアトラクタとしてのカントールの3進集合やシェルピンスキーガスケットなどの自己相似集合、アポロニウスの円充填集合などの鏡映変換群に対する不変集合、2次式の反復合成により生成されるカオスとしてのジュリア集合やパラメータ平面におけるマンデルブロー集合などがその代表例である。

本書ではこのような複素平面における代表的なフラクタル集合を紹介するとともに、その発生のメカニズムとしての力学系や、その下での複素数の行動の基本特性、および関連する力学系の基礎理論などを数学的に十分厳密に説明することを目的とする。すなわち複素数の「合理的」行動分析のために必要な数学的基礎についての解説書である。

この目的のためには、数学的にはいわゆる「函数論」(あるいは「複素解析」) と呼ばれるコーシー理論周辺の知識が不可欠であり、したがってこのような複素関数論の基礎をできるだけ自己充足的に解説することが必要となる。すなわち少なくとも応用上十分な「複素関数論」の教科書を与えることが、本書の第二の目的となる。記号の付いていない章節がそのような複素関数論の「最小限の教程」である。ただし「複素関数論」の教科書としては通常のものと配列や題材の選択に若干の違いがある。なお、志賀啓成著『複素解析学 I,II』(培風館) は内容的に本書と近い。その参考文献も含めて参照されたい。

＃の付いた章節は、具体的な力学系の下での複素数の行動分析の紹介のためのものである。さらに、＊のついた章節は複素関数に関するより高度な話題（と通常考えられているもの）を扱っている（したがって、これらの章節では内容の紹介を重視して証明を簡略に述べたり割愛した部分も多い）。ただし、有印の章節で述べられた定義の中には、無印の章節で用いられるものがあるので、有印の章節を省略される場合は定義のみ該当個所を参照されたい。なお、多変数の場合については、例えば上田・谷口・諸澤著『複素力学系序説』（培風館）の6章以降に解説があるので、そちらで補われたい。

次に、本書の理解のための基礎知識は最小限にとどめた。具体的には高校数学の知識のみを不可欠な知識として仮定し、大学での線形代数や微積分は（もちろん理解しているほうが望ましいが）あえて仮定せず、大学初年度の学生にも十分読破できるよう心がけた。また、本文中に（必ずしも易しいとは限らない）「課題」を挿入し、自ら考えることを促すと同時に、章末には多様な演習問題を与えて、より深い理解のための足がかりとした。もちろん標準的な演習問題が中心であるが、高度な話題への導入のための問題も含まれる。従って共に模範解答はあえて与えず、読者自身の考察に任せることにした。

最後に、草稿の段階で、米谷文男・松崎克彦・須川敏幸・奥山裕介の各氏にはご通読の上多くのご意見・ご注意をお寄せいただいた。また、最終段階では木坂正史・奥山裕介の各氏にも多くのご指摘をいただいた。いずれも本書の質を高める上で大いに役立った。深く感謝するものである。もとより、なおも散在するであろう不備・錯誤はすべて著者の非力の故であり、著者がすべての責を負うことは言うまでもない。

脱稿の日（2001 年 7 月某日)に：
1918 年、第一次世界大戦の戦勝国フランスでは、Julia が5章の冒頭にあるグランプリに輝き、Fatou, Lattés そして Montel も賞金を得た。同じ年、敗戦国ドイツではWeylの「連続体」と Hilbert の「公理論的思考」が出版され、激しく火花を散らしていた。この年のドイツではまた、終末論者 Spengler の著書も公刊され、ヨーロッパにセンセーションを巻き起こした。そこで述べられている言説の多くは厳しく批判されなければならないが、次の主張は今なお（あるいは今でこそ）傾聴に値するであろう。

単一の数学というものは無い。ただ様々な数学が有る。

『西洋の没落』シュペングラー

目　次

もう一つの函数論入門

＝複素数の行動分析の基礎＝

谷口雅彦

第 1 章
相似　正則関数と 1 次式

直線とは、そのどの部分をとって見ても全体と相似な曲線である。

ライプニッツ

「随分遠いね。元来何所から登るのだ。」
とひとりが手巾で額を拭きながら立ち留った。
「何所か己にも判然せんがね。何所から登つたつて、同じ事だ。山はあすこに見えて居るんだから」

『虞美人草』夏目漱石

3 次多項式に関する、いわゆるカルダノの公式には複素数が現れるが、Cardano 自身は正面からの議論は避けた。複素数を最初に真剣に考え、複素数の「形式的」演算法を整備したのは Bombelli で、16 世紀のことであった。

その後の紆余曲折を経て、18 世紀後半 Euler ら以降には、二つの実変数対象を組み合わせて複素変数の対象をつくる手法がしばしば用いられるようになったが、そのような対応が平面から平面への写像とみなせることを、最初に明確に認識したのは Lagrange であろう。そして 19 世紀に入ると、いわゆる Cauchy の積分定理・公式が証明される。

一方、正則写像こそ複素関数の理論の根幹であると考えたのは、おそらく 19 世紀半ばの Riemann が最初であったと思われる。その卓見はまた、幾何学的函数論の幕開けともなった。

1.1　複素（数）平面

実数全体 $\mathbb{R}$ を直線と同一視して、（実）数直線と呼んだように、複素数全体の集合

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

を平面と同一視する。

定義　複素数 $z = x + iy \in \mathbb{C}$ を (x, y)-平面上の点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ と同一視することにより、複素数全体の集合を平面と見なして**複素（数）平面** あるいは**ガウス平面**と呼ぶ。

このとき x、y はそれぞれ z の**実部**、**虚部**と呼ばれ、$\mathrm{Re}\, z$、$\mathrm{Im}\, z$ で表される。また x 軸を**実軸**、y 軸を**虚軸**と呼ぶ。

複素平面の点 z は、平面上の極座標表示 (r, θ) を用いれば

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とも表現されるが、これを z の**極形式**と呼ぶ。さらに r を z の**絶対値**と呼び、$|z|$ で表す。また θ を z の**偏角**と呼び、$\arg z$ で表す。

注意　偏角の値は 2π の整数倍を加えることを許してしか定まらない。この事実を強調するために $\arg z$ を

$$\theta \qquad (\mathrm{mod}\, 2\pi)$$

と記したり、

$$\theta + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

と記すことがある。

極形式は、直交座標との対応

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

をまとめて書いたにすぎない。特に (ピタゴラスの定理から)、次の不等式は明らかである。

命題 1.1　任意の複素数 z に対し

$$|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|, \qquad |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$$

が成り立つ。

定義　二つの複素数 $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ と $w = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ の和、積をそれぞれ

$$z + w = (x + u) + i(y + v), \qquad zw = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

で定義する[1]。

また、$z = x + iy$ に対し $x - iy$ を z の**複素共役**と呼び、$\overline{z}$ で表す。

命題 1.2　任意の複素数 z と w に対し

1. $\overline{(\overline{z})} = z$
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $2\,\mathrm{Re}\,z = z + \overline{z}, \qquad 2i\,\mathrm{Im}\,z = z - \overline{z}$
4. $|z|^2 = z\overline{z}$
5. $|z + w| \leq |z| + |w|, \qquad |zw| = |z||w|$

が成り立つ。

5. の第 1 式を**3 角不等式**という。

課題　命題 1.2 で、1. から 4. の各主張を示せ。

[証明]　5. のみを示す。まず 2. と 4. から、

$$|zw|^2 = zw\overline{(zw)} = z\overline{z} \cdot w\overline{w} = |z|^2|w|^2$$

であるので、第 2 式がわかる。さらに 1. から 4. と命題 1.1 より

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\,z\overline{w} + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

---

[1] **虚数単位** i を形式的には実数と同等に扱い $i^2 = -1$ を満たすものと仮定することに相当する。

となり、３角不等式が得られる。（証明終わり）

次に極形式を用いた表示が

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad w = R(\cos\Theta + i\sin\Theta)$$

であるとすれば、積の定義から[2]

$$zw = rR\left(\cos(\theta+\Theta) + i\sin(\theta+\Theta)\right)$$

であることが示せる。この等式からさらに次の主張がわかる。

命題 1.3　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とするとき、以下が成り立つ。

1. $\overline{z} = r\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$

2. $\arg(1/z) = -\arg z = \arg\overline{z} \qquad (\mathrm{mod}\, 2\pi)$

3. $z^k = |z|^k(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta))$

[証明]　上述より、

$$z\overline{z} = r^2 = r^2(\cos 0 + i\sin 0)$$

だから、$\overline{z}$ の偏角と z の偏角とを加えれば $0\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$ でなければならない。したがって 1. を得る。

同様に、2. も示せる。3. は上に述べた積の表示式を繰り返し適用すればよい。（証明終わり）

系 1.4 (ド・モアブルの公式)　$z = \cos\theta + i\sin\theta$ とするとき、

$$z^k = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta)$$

が成り立つ。

---

[2] ここでは、３角関数の加法定理は既知として用いる。ただし、３章の１節２節を先に読めば、複素指数関数の加法定理の系として、主張が得られる。

定義　k 個の同じ複素数 z を掛け合わせた数を z^k で表す。また z^{-k} は $1/z^k$ を意味する。

なお、この記法は数のみに用い、関数には用いない。すなわち、関数 $f(z)$ の場合には、本書では

$$f(z)^k$$

で複素数 $f(z)$ を k 回掛け合わせることを表し、ベキ表示

$$f^k(z)$$

は常に k 回同じ写像 $f(z)$ を反復して合成することを意味する。すなわち、

$$f^k(z) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k\text{ 個}}(z)$$

である[3]。

さて、加法については直交座標での表示の意味を、乗法については極座標での表示の意味を考えれば、次のような幾何学的解釈ができる。

命題 1.5 (複素数の四則の幾何学的意味)　複素平面上では、複素数 z に複素数 α を加えること：

$$T_\alpha(z) = z + \alpha$$

は、複素平面から複素平面への写像としては、α だけずらせる平行移動である。

複素数 z に複素数 $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を乗ずること：

$$M_\alpha(z) = \alpha z$$

は、複素平面から複素平面への写像としては、原点中心の r 倍の伸縮と角度 θ の回転との合成である（図 1.1)。

複素共役を取る操作

$$R(z) = \overline{z}$$

---

[3] したがって $f(z)$ が定まっているからといって、$f^k(z)$ が定義できるとは限らない。

は、複素平面から複素平面への写像としては、実軸に関する線対称移動である。

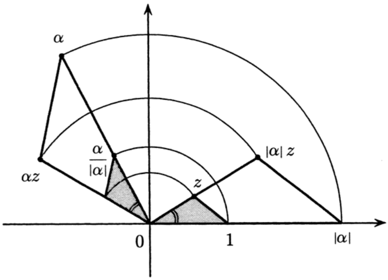


図 1.1　積の幾何学的意味

1.2　1次式と相似変換

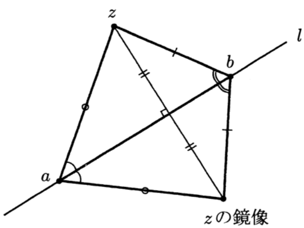


図 1.2　直線に関する鏡映変換

前出の回転と平行移動は平面の代表的な合同変換であるが、一般的に、これらの有限個の合成で得られる変換は、向きを保つ合同変換と呼ばれる。ここでは、少し異なる幾何学的な定義を与えておく。

定義　直線 ℓ に関する線対称移動を直線 ℓ に関する**鏡映変換**という（図1.2）。

直線に関する鏡映変換の有限個の合成を**合同変換**と呼ぶ。さらに、その際に合成する鏡映変換の個数が偶数であれば**向きを保つ合同変換**と呼ぶ。

命題 1.6　異なる2点 a, b を通る直線に関する鏡映変換は、次式で表示さ

れる。

$$R(z) = \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} \ (\bar{z}-\bar{a}) + a$$

注意　$a=0$ かつ $b=1$ のとき、すなわち直線が $\mathbb{R}$ の場合が複素共役である。言いかえれば、「直線に関する鏡映変換」とは「複素共役」の自然な拡張概念である。

[証明]　任意の複素数 z に対し、 z と $w=R(z)$ を結ぶ線分の垂直2等分線が元の直線であるから、$|z-a|=|w-a|$ かつ

$$\arg\left(\frac{z-a}{b-a}\right) + \arg\left(\frac{w-a}{b-a}\right)$$

は 0 （正確には 2π の整数倍）となる。したがって

$$\frac{w-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{z-a}{b-a}\right)}$$

となり主張を得る。　（証明終わり）

定理 1.7 (合同変換の複素表現)　任意の向きを保つ合同変換 $S(z)$ は、次式で表示される。

$$S(z) = \alpha z + \beta \qquad (|\alpha|=1,\ \beta\in\mathbb{C})$$

逆にこの表示を持つ変換は向きを保つ合同変換である。

[証明]　命題 1.6 から、直線に関する鏡映変換は

$$z \mapsto \alpha\bar{z} + \beta \qquad (|\alpha|=1,\ \beta\in\mathbb{C})$$

の形をしている。したがって二つのこのような変換の合成は求める形をしている。最後にこのような1次式の合成もまた、同様の形をしているから、前半の主張がわかる。

次に与えられた表示式は原点中心の回転と平行移動との合成であるから、後半の主張を得るには、原点中心の回転と平行移動が直線に関する鏡映変換二つの合成として表せることを示せばよい。

まず平行移動 $S(z)=z+\alpha$ に対し、0 あるいは $\alpha/2$ をそれぞれ通り α 方向に垂直な2直線に関する鏡映変換

$$R_1(z)=-\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\,\bar{z},\quad R_2(z)=-\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\left(\bar{z}-\frac{\bar{\alpha}}{2}\right)+\frac{\alpha}{2}$$

を考えれば、$R_2\circ R_1(z)=S(z)$ を満たすことは直接計算できる。（ここで、これらの2直線はそれぞれ 0 と $i\alpha$、あるいは $\alpha/2$ と $\alpha/2+i\alpha$ を通ることに注意せよ。）

次に、原点を中心とする回転角 θ の回転

$$T(z)=(\cos\theta+i\sin\theta)z$$

に対し、原点を通り、交角が $\theta/2$ の適当な二つの直線に関する鏡映変換、例えば

$$R_1(z)=\bar{z},\quad R_2(z)=(\cos\theta+i\sin\theta)\bar{z}$$

を選べば、$R_2\circ R_1(z)=T(z)$ である。　　　　（証明終わり）

課題　任意の直線に関する鏡映変換は、合同変換により複素共役と共役である。すなわち、適当な合同変換 T を用いて $T\left(\overline{T^{-1}(z)}\right)$ と書けることを示せ。

定義　（向きを保つ）合同変換と原点中心の伸縮との有限回の合成：すなわち、各 $R_j(z)$ が（向きを保つ）合同変換か原点中心の伸縮であるとして、それらの合成

$$R_n\circ\cdots\circ R_1(z)$$

の形の表示を持つ変換を**（向きを保つ）相似変換**という。

定理 1.8 (相似変換の複素表現)　任意の向きを保つ相似変換 $S(z)$ は、次式で表示される。

$$S(z)=\alpha z+\beta\qquad(\alpha\in\mathbb{C}-\{0\},\ \beta\in\mathbb{C})$$

逆にこの表示を持つ変換は向きを保つ相似変換である。

課題　この定理を証明せよ。

1.3 自己相似集合と相似次元

本節では、最初の「フラクタル集合」[4] の例として、自己相似集合をいくつか紹介する。

定義 複素平面の部分集合 E の点 α が E の**孤立点**であるとは、α 中心で半径正の円板で、α 以外に E の点を含まないものが取れることとする。

また、点 α が、集合 E の**集積点**であるとは、α が $E \cup \{\alpha\}$ の孤立点ではないことである。集合 E とその集積点全体の和集合を E の**閉包**と呼ぶ。

定義 複素平面の部分集合 E が**閉集合**であるとは、E の集積点がすべて E に含まれること、すなわち E の閉包が E と一致すること、である。また閉集合 E が、原点中心の半径が有限な円板に含まれるとき、特に**有界**（な）閉集合という。

次に、実直線上の区間 $[a,b]$ から複素平面への連続写像（すなわち実部および虚部が連続な複素数値関数）$z = z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ あるいはその像 $z([a,b])$ を**曲線**と呼び、特に $z(a) = z(b)$ のとき**閉曲線**という[5]。

また、複素平面の部分集合 E が**弧状連結**であるとは、E の任意の 2 点が E 内の曲線で結べること、すなわち、E 内の曲線 $z = z(t) : [a,b] \to E$ で、その端点 $\{z(a), z(b)\}$ がそれら 2 点となるものが見つかることをいう。

定義 有界閉集合 E が、有限個の縮小相似変換[6]$\{T_1(z), \cdots, T_N(z)\}$ に関する**自己相似集合**であるとは、

$$E = T_1(E) \cup \cdots \cup T_N(E)$$

が成り立つこととする。

以下ではさらに、分離条件：「任意の異なる j, k に対し

---

[4] フラクタル集合の数学的定義は統一されていない。本書ではフラクタル集合と呼ばれる多様な集合の例示に主眼を置く。

[5] この節では、「連続」や「収束」は高校程度の理解で十分である。厳密な定義は次節を見よ。

[6] $T(z) = \alpha z + \beta$ が縮小相似変換であるとは、$0 < |\alpha| < 1$ を満たすことである。

$$T_j(E) \cap T_k(E)$$

は高々1点からなる」を満たすものを取り上げる。

なお、このような集合を理解する一方法として、ここでは、次のような集合の極限を考える。

定義　閉集合の列 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ が集合 E に（ハウスドルフ）**収束**するとは、

1. E の各点に、ある点列 $\{z_k \in E_k\}$ が収束し、
2. 各 E_k から1点を選んでできる点列の集積点は常に E に属する

ことをいう。このとき、E を集合列 $\{E_k\}$ の極限と呼ぶ。

命題 1.9　ある有界な集合に含まれる閉集合の収束列に対し、その極限は有界閉集合である。

課題　この命題を証明せよ。

例 1.1　二つの縮小相似変換

$$T_1(z) = \frac{1}{3}z, \qquad T_2(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}$$

に関する空集合でない最小の自己相似集合を**カントールの3進集合**という。

具体的には、$E_0 = [0,1]$ から、任意の正の整数 k に対し帰納的に

$$E_k = T_1(E_{k-1}) \cup T_2(E_{k-1})$$

と定めるとき、$\{E_k\}$ は収束し、その極限 E がカントールの3進集合である。

最小性は、上記の構成と同様にして帰納的に得られる $0\,(\in E)$ の像全体からなる集合の閉包が E と一致することからわかる。

課題　上記の主張を証明せよ。さらに以下の例 1.2 や 1.3 でもそれらの主張を証明せよ。

定義　一般に有界閉集合 E が**カントール型**であるとは、そのすべての点が E の集積点であり、かつ E の任意の2点が E の補集合 $\mathbb{C} - E$ 内のジョルダン閉曲線により、その内側と外側に分離されることとする。

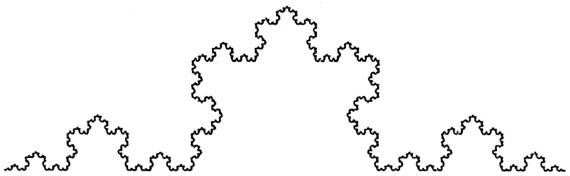


図 1.3　コッホの雪片曲線

ここで、$z(t_1) = z(t_2)$ なら $t_1 = t_2$ または $\{t_1, t_2\} = \{a, b\}$ となる閉曲線 $z = z(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ あるいはその像 $z([a, b])$ を**ジョルダン閉曲線**と呼ぶ。複素平面内のジョルダン曲線 C の補集合 $\mathbb{C} - C$ は弧状連結ではなく、二つの**弧状連結成分**（すなわち、弧状連結な部分集合 Ω で、Ω を含む弧状連結な部分集合が Ω 以外にないようなもの）に分割されることが知られている[7]。そのうちで、有界な成分を C の**内側**、あるいは C で**囲まれた領域**と呼び、もう一方の成分を C の**外側**と呼ぶ。

課題　カントールの 3 進集合がカントール型であることを示せ。

例 1.2　　二つの縮小相似変換

$$T_1(z) = \alpha\overline{z}, \qquad T_2(z) = \overline{\alpha}(\overline{z} - 1) + 1$$

に関する空集合でない最小の自己相似集合を**コッホの雪片曲線**（の一部）という。ただし、

$$\alpha = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

である。

具体的には、$0, 1, \alpha$ を頂点とする閉 3 角形（内側も含めた 3 角形）E_0 から、任意の正の整数 k に対し帰納的に

$$E_k = T_1(E_{k-1}) \cup T_2(E_{k-1})$$

と定めるとき、それらの極限 E がコッホの雪片曲線である（図 1.3）。

---

[7] **ジョルダンの曲線定理**と呼ばれる

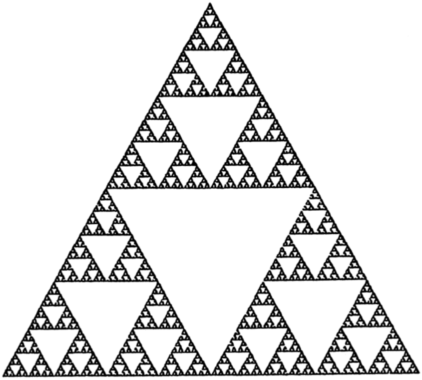


図 1.4　シェルピンスキーガスケット

例 1.3　三つの縮小相似変換

$$T_1(z) = \frac{1}{2}z, \qquad T_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \qquad T_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

に関する空集合でない最小の自己相似集合を（標準的な）**シェルピンスキーガスケット**という。

具体的には、3点

$$0, \quad 1, \quad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

を頂点とする閉3角形 E_0 から、任意の正の整数 k に対し帰納的に

$$E_k = T_1(E_{k-1}) \cup T_2(E_{k-1}) \cup T_3(E_{k-1})$$

と定めるとき、それらの極限 E がシェルピンスキーガスケットである（図1.4）。

注意　空集合でない最小の自己相似集合 E は、それを定義する縮小相似変換の族（集合）に対する複素平面での**アトラクタ**である。詳しくは章末の演習問題10を見よ。

最後に、物理的な「スケーリング則」を満たすという要請から必然的に定

義される自己相似集合の「次元」の値を相似次元と呼ぶ。より正確には、

定義　有限個の縮小相似変換 $T_1(z), \cdots, T_N(z)$ の1次の係数の絶対値をそれぞれ $a_1, \cdots, a_N$ とするとき、

$$a_1^d + \cdots + a_N^d = 1$$

の正数解 d を、それらの縮小相似変換の族に関する空集合でない最小の自己相似集合の**相似次元**と呼ぶ。

課題　カントールの3進集合、コッホの雪片曲線、シェルピンスキーガスケットの相似次元を求めよ。

注意　一方、いわゆる位相次元[8]は、上記の例ではおのおの、$0, 1, 1$ となる。マンデルブロは、このように位相次元と相似次元の異なる集合をフラクタルと呼んだ。ここでは**自己相似フラクタル**と呼んでおく。

1.4　複素微分と正則関数

複素平面上でも、極限値や連続関数が実関数の場合と同様に定義できる。

定義　複素平面の部分集合 E が**開集合**であるとは、E の各点 z に対し z 中心で半径正の円板が E に含まれることである。ここで、本書では**円板**は常に開円板を意味する[9]。補集合が開集合である集合を**閉集合**と呼ぶ[10]。複素平面の部分集合 E が、点 z の**近傍**であるとは、z を含む開集合を E が含むことである。

開集合 E が**領域**であるとは、E が**連結**である、すなわち共通点を持たない二つの空でない開集合の和集合の形には表せないことである。

例 1.4　中心 α で半径 $r\,(>0)$ の円板 $\{z \mid |z-\alpha| < r\}$ は領域である。

---

[8] その集合を切断するときに切り口が必要とする最小の次元に 1 を加えたものである。特に切り口が空集合、あるいは有限個の点で済むときにはそれぞれ、$-1+1=0$、$0+1=1$ となる。したがって、位相次元は常に非負の整数である。

[9] すなわち、中心 α で半径 $r>0$ の円板とは集合 $\{z \mid |z-\alpha| < r\}$ である。以下では $\{|z-\alpha| < r\}$ とも略記する。

[10] **課題**　前節の定義と一致することを確かめよ。

一方、$\mathbb{C}-\mathbb{R}$ は開集合であるが、領域ではない。

命題 1.10　任意の領域 D は**弧状連結**である。すなわち、D の任意の2点が D 内の曲線で結べる（すなわち、曲線 $z=z(t):[a,b]\to D$ で、端点 $z(a),z(b)$ がそれら2点となるものが見つかる）。

[証明]　実際そうでないとすると、D 内の曲線で結べないような D 内の2点 z_1,z_2 がある。そこで、z_1 と D 内の曲線で結べる点全体を D_1、z_1 と D 内の曲線で結べない点全体を D_2 とすると、各 D_j の点中心の D に含まれる円板は（その各点が中心と線分で結べるから）D_j に含まれる。したがって D_j は開集合で、$z_j\in D_j$ より空集合ではない。また明らかに和集合が D になるので、D は連結でないことになり矛盾である。　（証明終わり）

定義　複素平面の部分集合 E から複素平面への写像

$$f: z\in E\mapsto w=f(z)\in\mathbb{C}$$

を（複素変数複素数値関数と呼ばずに）**複素関数**と呼ぶ。

次に、点 α を集積点に持つ集合 E 上で定義された複素関数 $w=f(z)$ が、α で**極限値** A を持つとは、任意の正数 ϵ に対し、適当に正数 δ を選べば $0<|z-\alpha|<\delta$ を満たす E の点 z に対し常に $|f(z)-A|<\epsilon$ が成り立つことである。

このとき、

$$f(z)\to A \qquad (z\in E,\to\alpha)$$

あるいは

$$\lim_{z\in E,\to\alpha} f(z)=A$$

と記す。ここで、E が α の近傍、すなわち α 中心で半径正の円板を含む集合のときは「$\in E,$」を省略して $z\to\alpha$ と書く。

さらに、複素平面の部分集合 E 上で定義された複素関数 $w=f(z)$ が E 上で**連続**であるとは、任意の $\alpha\in E$ に対し

$$\lim_{z\in E,\to\alpha} f(z)=f(\alpha)$$

が成り立つことである。

例 1.5 $f(z)$ が自然数の集合上で定義された関数、言いかえれば**複素数列** $\{z_k = f(k)\}_{k=1}^{\infty}$ の場合には、この数列が極限値 A を持つことを、任意の正数 ϵ に対し、適当に正数 N を選べば $k > N$ を満たす任意の k に対し $|z_k - A| < \epsilon$ が成り立つことで定義する。

このとき、

$$\lim_{k\to\infty} z_k = A$$

と記す。なお、数列 $\{z_k\}$ が極限値 A を持つことを特に z_k が A に**収束するともいう**。

注意 直観的には、「z が α に近づくとき、値 $f(z)$ が近づく値が極限値で、その値が $f(\alpha)$ と一致するとき、連続と呼ぶ」ということである。

さらに、微分の定義も実変数の場合と形式的には同じである。

定義 点 α の近傍 D 上で定義された複素関数 $w = f(z)$ が、α で**複素微分可能** であるとは、極限

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$$

が複素数として定まることである。言いかえれば、複素数 A を適当に選べば

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{|f(z) - f(\alpha) - A(z-\alpha)|}{|z-\alpha|} = 0$$

が成り立つことである。このとき、A を α での $f(z)$ の**複素微分係数**と呼び、$f'(\alpha)$ あるいは

$$\frac{df}{dz}(\alpha)$$

で表す。

さらに、複素平面の部分領域[11] D 上の複素関数 $f(z)$ が D 上**正則**であるとは、$f(z)$ が D の各点で複素微分可能であることとする。このとき、D 上の複素関数 $f'(z)$ を $f(z)$ の**導関数**と呼ぶ。

---

11 「複素平面内の領域」とも呼ぶ

課題　1点 α で複素微分可能な関数は α で連続であることを示せ。

領域 D 上で正則な関数 $f(z)$ と $g(z)$ の和、差、積は、D 上正則である。また、D 上で $g(z)$ が0にならなければ、商 $f(z)/g(z)$ もまた D 上正則である。さらに、$f(D)$ が領域 D' に含まれ、$h(w)$ が D' 上で正則なら、合成関数 $h(f(z))$ は D 上正則である。以上の主張を示せ（証明はすべて、実変数関数の微分の場合とまったく同様である）。

例 1.6　実変数の場合とまったく同様に

$$\frac{d(z^m)}{dz}(\alpha) = m\alpha^{m-1}$$

が成り立つ。

実際、

$$\lim_{z\to\alpha}\frac{z^m-\alpha^m}{z-\alpha} = \lim_{z\to\alpha}\sum_{k=0}^{m-1} z^k\alpha^{m-1-k} = m\alpha^{m-1}$$

である。

注意　実関数 $y=f(x)$ の場合、c での微分係数から「1次式近似」として c での接線 $y=f'(c)(x-c)+f(c)$ が得られたが、複素関数の場合には

$$w = f'(c)(z-c)+f(c)$$

は2節で見たように、相似変換を表していた。したがって、複素平面での「1次式近似」は「相似変換近似」である。

このことは $f(z)$ により、「微視的」には c での角度が $f(c)$ での等しい角度にうつされることを意味している（図 1.5）。さらに、微分係数 $f'(c)$ はその際の回転と伸縮の度合を表している[12]。

なお類似の1次式近似は、実2変数の関数に対しても考えられる。

定義　実2変数の実数値関数 $F(x,y)$ が (a,b) で**全微分可能**であるとは、適当な実数 p,q を選べば、

---

[12] 章末の演習問題 11 も参照せよ

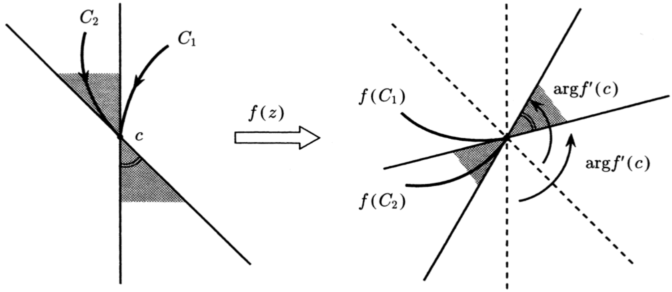


図 1.5 微視的な角度の保存

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|F(x,y)-F(a,b)-(p(x-a)+q(y-b))|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0$$

が成り立つことである。

このとき定義から、p と q はそれぞれ $F(x,b)$ と $F(a,y)$ の x あるいは y に関する a あるいは b での微分係数と一致する。それらを $F(x,y)$ の (a,b) での x および y についての**偏微分係数**といい、$F_x(a,b)$ と $F_y(a,b)$ で表す (すなわち、

$$p=F_x(a,b), \qquad q=F_y(a,b)$$

である)。

一方、領域 D で定義された実数値関数 $F(x+iy)$ が（x と y を変数とする実 2 変数関数として）**連続的偏微分可能**（あるいは C^1 **級**）であるとは、D の各点で偏微分係数が共に定まり、それらが D 上連続であることとする。

課題 ある領域上で連続的偏微分可能な関数は、その領域上で全微分可能であることを示せ。

定理 1.11 (コーシー・リーマン方程式) 点 $\alpha=a+ib$ の近傍 D 上で定義された複素関数 $w=f(z) \quad (z=x+iy)$ が、α で複素微分可能であることと、実 2 変数の実数値関数 $U(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$ および $V(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$

が (a,b) で全微分可能で、かつ次の**コーシー・リーマン方程式**

$$U_x(a,b)=V_y(a,b), \qquad U_y(a,b)=-V_x(a,b)$$

を満たすこととは同値である

[証明]　まず、$w=f(z)$ が α で複素微分可能であるとする。これは

$$\lim_{z\to\alpha}\frac{|f(z)-f(\alpha)-f'(\alpha)(z-\alpha)|}{|z-\alpha|}=0$$

と同値であった。x 軸および y 軸に平行な方向から z を α に近づけても同じ極限値を持つことから

$$f'(\alpha)=U_x(a,b)+iV_x(a,b)=(-i)U_y(a,b)+V_y(a,b)$$

を得るので、まずコーシー・リーマン方程式が成り立つことがわかる。次に最初の式に $f'(\alpha)=U_x(a,b)+iV_x(a,b)$ を代入し、実部と虚部に分けると、

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{|U(x,y)-U(a,b)-(U_x(a,b)(x-a)-V_x(a,b)(y-b))|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0$$

かつ

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{|V(x,y)-V(a,b)-(V_x(a,b)(x-a)+U_x(a,b)(y-b))|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0$$

を得る。これらから $U(x,y)$ と $V(x,y)$ の (a,b) での全微分可能性が得られる。

逆は、上の議論を逆にたどればよい。　　　　(証明終わり)

定義　点 α の近傍上で定義され、その実部 $U(z)$ と虚部 $V(z)$ が α で全微分可能な複素関数 $w=f(z)$ が、α で**等角**であるとは、行列

$$\frac{\partial(U,V)}{\partial(x,y)}(\alpha)=\begin{pmatrix} U_x(\alpha) & U_y(\alpha) \\ V_x(\alpha) & V_y(\alpha) \end{pmatrix}$$

が適当な回転を表す直交行列[13]

[13] 行列式が ± 1 の行列を**直交行列**という。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

の正の実数倍であることとする。

定理 1.12 (等角性)　点 α のある近傍で定義された複素関数 $f(z)$ に対し、$f(z)$ の実部と虚部が α で全微分可能かつ α で等角であることと、$f(z)$ が α で複素微分可能かつ $f'(\alpha) \neq 0$ を満たすこととは同値である。

[証明]　上の定義で $\theta = \arg f'(\alpha)$ とすれば、定理 1.11 から主張を得る。

（証明終わり）

1.5　原始関数と複素積分

複素微分可能性は、逆演算としての複素積分を考えることにより、より明確に理解できる。まず実関数の場合と同じように、原始関数を定義しよう。

定義　領域 D 上の連続な複素関数 $f(z)$ に対し、複素関数 $F(z)$ が $f(z)$ の**原始関数**であるとは、$F(z)$ が D 上正則で、その導関数が D 上恒等的に

$$F'(z) = f(z)$$

を満たすことである。

さて原始関数を具体的に構成できればよいが、そのためには「不定積分」を用いるのが普通である。そこでまず、積分の「経路」として適当な曲線の定義から始める。

定義　実直線上の区間 $[a, b]$ から複素平面への連続写像、あるいはその像を**曲線**と呼んだが、曲線 $C = \{z = z(t) : [a, b] \to \mathbb{C}\}$ が**求長可能**であるとは、任意の $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{t_j\}_{j=0}^{n}$：

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

に対し、対応する折れ線の長さ

$$L(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} |z(t_j) - z(t_{j-1})|$$

が有界となることである。すなわち、上限[14]

$$L(C) = \sup_{\Delta} L(\Delta)$$

が有限の値となることである[15]。ただし、Δ は $[a, b]$ のすべての分割を動くものとする。このとき、$L(C)$ を**曲線 C の長さ**という。

例 1.7　折れ線の（曲線としての）長さは、各線分の長さの和である。

課題　3節で述べたコッホ曲線は求長可能でないことを示せ。

課題　曲線の列がある曲線に（ハウスドルフ）収束しても、その長さが収束するとは限らない。そのような例を与えよ。

定義　求長可能な曲線 $C = \{z = z(t) : [a, b] \to \mathbb{C}\}$ と、C 上連続な複素関数 $f(z)$ が与えられたとする。

任意の $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{t_j\}_{j=0}^{n}$ に対し、各区間 $[t_{j-1}, t_j]$ の1点 ξ_j を任意に固定し、$z_j = z(t_j)$ かつ $\zeta_j = z(\xi_j)$ とおいて、Δ（と $\{\xi_j\}$）に関する近似和を

$$S(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1})$$

と定義する。このとき、**分割の幅**

$$m(\Delta) = \max_{j=1,\cdots,n} (t_j - t_{j-1})$$

が0になるように分割を動かせば、$S(\Delta)$ は常に、一定値 S に収束するこ

---

[14] 実数の集合 E の**上限** $\sup_{x \in E} x = \sup\{x \mid x \in E\}$ とは、$E \subset (-\infty, y]$ となる実数 y の最小値である。なお、E がいくらでも大きい数を含むときは、E の上限を $+\infty$ と約束する。

[15] なお、上限の存在、あるいはより一般的に「実数全体を空でない二つの集合 E_1 と E_2 に分割し、$z_k \in E_k$ $(k = 1, 2)$ ならば常に $z_1 < z_2$ が成り立つとすると、E_1 に含まれる値の最大値か E_2 に含まれる値の最小値がある」という事実を**実数の完備性**と呼ぶ。これは実数の定義に関わる事柄で、例えばデーデキント『数について』（岩波文庫）の第一編で明晰に議論されている。

とが示せる（その証明は本章の最終節で述べる）。この値 S を $f(z)$ の C に沿う**複素積分**と呼び

$$\int_C f(z)dz$$

と記す。

定義より複素積分の値は曲線のパラメータの取りかたによらない。また、直ちに以下の性質がわかる。

命題 1.13

1. 曲線 C 上連続な任意の複素関数 $f(z)$ と $g(z)$ および任意の定数 a と b に対して
$$\int_C (af(z)+bg(z))dz = a\int_C f(z)dz + b\int_C g(z)dz$$
が成り立つ。
2. 曲線 $C=\{z=z(t):[a,b]\to\mathbb{C}\}$ に対し、
$$-C=\{z=z(-t):[-b,-a]\to\mathbb{C}\}$$
とするとき、 C 上連続な任意の複素関数 $f(z)$ は
$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$
を満たす。
3. 二つの曲線 $C_1=\{z=z_1(t):[a,b]\to\mathbb{C}\}$ と $C_2=\{z=z_2(t):[c,d]\to\mathbb{C}\}$ に対し $z_1(b)=z_2(c)$ ならば、それらをつないだ曲線
$$C_1+C_2=\{z=z(t):[a,b+d-c]\}$$
が $t\in[b,b+d-c]$ では $z(t)=z_2(t+c-b)$ とおくことにより、自然に定義できる。このとき C_1+C_2 上連続な任意の複素関数 $f(z)$ は
$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$
を満たす。

4. 曲線 C 上連続な任意の複素関数 $f(z)$ に対して、近似和

$$|S|(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} |f(\zeta_j)||z_j - z_{j-1}|$$

も、$m(\Delta) \to 0$ のとき一定の極限値に収束する[16] が、それを

$$\int_C |f(z)||dz|$$

で表すとき、

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)||dz|$$

が成り立つ。

5. 曲線 C 上連続な任意の複素関数 $f(z)$ に対して

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq L(C) \max_{z\in C} |f(z)|$$

が成り立つ。ここで $\max_{z\in C} |f(z)|$ は $|f(z)|$ の C 上での最大値を表す[17]。

[証明]　1. と 2. は近似列では明らかに成立するので、極限を取ればよい。3. は $C_1 + C_2$ の分割に常に b を含めておけばよい。

4. と 5. は

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1})\right| &\leq \sum_{j=1}^{n} |f(\zeta_j)||z_j - z_{j-1}| \\ &\leq \max_{z\in C} |f(z)| \sum_{j=1}^{n} |z_j - z_{j-1}|\end{aligned}$$

からわかる。　（証明終わり）

注意　特に、実数直線内の区間に沿う複素積分は、実変数の積分として理解することができる。(実部と虚部に分けて考えれば、上述と同じ定義が、ま

[16] 最終節と同様の議論で証明できる。
[17] 最大値の存在については命題 1.15 の後の課題を見よ。

さに区間上の積分の定義である。)

1.6 コーシーの積分定理（弱形）

複素微分とは1次式による近似であった。一方、次の補題は定義より容易にわかる。

補題 1.14 1次式 $\alpha z+\beta$ に対しては、**軸平行**な、すなわち各辺がどちらかの軸に平行な、任意の閉長方形の周[18] C に沿う複素積分が 0 になる。すなわち

$$\int_C (\alpha z+\beta)dz = 0$$

が成り立つ。

[証明] 複素積分の定義より、端点が z_1 と z_2 の線分 L に対して、

$$\int_L \beta dz = \beta(z_2 - z_1)$$

である。

さらに、定義における ζ_j として $(z_{j-1}+z_j)/2$ を選べば、

$$\int_L \alpha z dz = \frac{\alpha}{2}(z_2^2 - z_1^2)$$

を得る。すべての辺について加え合わせれば主張を得る。 (証明終わり)

したがって、各点の周りの十分小さい長方形の周に沿っては、正則関数 $f(z)$ の複素積分の値は周の長さが 0 に近づくより早く 0 に近づくことがわかる。そのような閉長方形の和として任意の閉長方形が表現できるので、積分経路に関する線形性から、長方形の場合のいわゆるコーシーの積分定理が得られる[19]。以上の考察を厳密に述べておこう。

---

[18] 以下では、長方形の周とその内側を合わせた閉集合を、**閉長方形**と呼ぶ。また**周**というときには常に、内側を左に見る向きに回るものとする。

[19] さらに一般の場合も近似により示せるが、本書では 3 章で異なる証明を与える。

そのために、(実数の完備性から導かれる) 複素数の完備性を次の**ボルツァノ・ヴァイエルシュトラスの定理**の形で述べておく。

命題 1.15　有界な集合内の無限個の点からなる集合は集積点を持つ。すなわち、そのような集合 E の点からなる無限点列で、1点に収束するものがある。

[証明]　与えられた集合 E に対し、$E \subset R = \{|x|, |y| \leq M/2\}$ としてよい。このとき R の向かい合う辺の中点を結ぶ線分で R を4等分すればそのどれかの閉正方形は E の点を無限個含む。それを R_1 とする。

以下繰り返して、辺の長さが $2^{-k}M$ の閉正方形の列 $\{R_k\}$ で、$R_k \subset R_{k-1}$ かつ $R_k \cap E$ が無限点集合であるものが取れることがわかる。

このとき、すべての R_k に含まれる（唯一の）点が E の集積点である[20]。

（証明終わり）

課題　有界閉集合 E 上の連続な実数値関数は、E 上で最大値を取ることを示せ。

定理 1.16 (長方形の場合のコーシーの積分定理)　領域 D 上で正則な関数 $f(z)$ に対し、D に含まれる軸平行な任意の閉長方形の、その周 C に沿う複素積分は0である：

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

[証明]　軸平行な閉長方形 R を固定し、辺の長さを a と b、その周を C とする。

$$\eta(R) = \int_C f(z)dz$$

とするとき、$\eta(R) = 0$ を示せばよい。

20　「すべての R_k に含まれる点が必ずある」という主張が複素数の完備性である。この要請は「任意のコーシー列が収束する」という形で表現されることも多い（定理 1.18 の証明を見よ)。また「辺の長さが0に縮小してゆく閉長方形 R_k が1点からなる集合にハウスドルフ収束する」と言うこともできるが、このように集合を絞ってゆく論法を一般に**区間縮小法**と呼ぶ。

そこで R を、向かい合う辺の中点を結ぶ線分で、R と相似な閉長方形に 4 等分するとき、そのうちの一つ R_1 は

$$|\eta(R_1)| \geq \frac{1}{4}|\eta(R)|$$

を満たす。

以下、4 等分割を繰り返してゆけば、辺の長さが $2^{-k}a$ と $2^{-k}b$ の閉長方形の列 $\{R_k\}$ で、

$$R_k \subset R_{k-1}, \qquad |\eta(R_k)| \geq \frac{1}{4^k}|\eta(R)|$$

を満たすものがあることがわかる。

一方 R_k は 1 点からなる集合に（ハウスドルフ）収束する。その極限を $\{z_0\}$ とすると、仮定より、z_0 でも複素微分可能だから

$$\lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|}{|z-z_0|} = 0$$

が成り立つ。すなわち、任意の正数 ϵ に対し適当に正数 δ を取れば、$0 < |z-z_0| < \delta$ を満たす z に対し常に

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)| < \epsilon|z-z_0|$$

が成り立つ。したがって R_k の周を C_k とすると、$2^{-k}(a+b) < \delta$ なら

$$\int_{C_k} |f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)||dz| < \varepsilon \int_{C_k} |z-z_0||dz|$$

が成り立つことが、命題 1.13 の 4. での定義から容易にわかる。すなわち

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_{C_k} |f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)||dz|}{\int_{C_k} |z-z_0||dz|} = 0$$

である。補題 1.14 より特に

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \frac{|\eta(R_k)|}{\int_{C_k} |z-z_0||dz|} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\int_{C_k} (f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0))dz\right|}{\int_{C_k} |z-z_0||dz|} = 0
\end{aligned}$$

を得るが、

$$\int_{C_k} |z - z_0||dz| \leq 2^{-k}(a+b) \cdot L(C_k) = 4^{-k} \cdot 2(a+b)^2$$

であるから、

$$|\eta(R)| \leq \lim_{k\to\infty} 4^k |\eta(R_k)| = 0$$

が成り立つ。したがって、$\eta(R) = 0$ であることが示せた。　（証明終わり）

実は積分定理の結論は局所的には原始関数の存在条件と同値であり、この条件から逆に正則性が結論できるのであるが、そのためには回転数の概念を導入したほうが議論が明快になるので、この議論の続きは3章5節まで中断することにする。

1.7　複素積分の存在証明

連続な複素関数に対し、その複素積分の存在は「有界閉集合上で連続な関数の行動は、何所でも同じように穏やかだ」という事実から導くことができる。この一様性は、数学的には次のように定式化される。

定義　複素平面の部分集合 E 上の連続関数 $f(z)$ が E 上で**一様連続**であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対し適当に $\delta > 0$ を選べば

$$\sup_{w\in E,\, |w-\alpha|\leq\delta} |f(w) - f(\alpha)| < \epsilon$$

が、任意の $\alpha \in E$ に対し成り立つことである。

まず命題 1.15 より、次の主張が示せる[21]。

定理 1.17　複素平面内の有界閉集合 E 上の連続関数 $f(z)$ は E 上で一様連続である。

[証明]　そうでないとすると、ある $\epsilon > 0$ に対しては、どんな自然数 k を選んでも、E の点 z_k と w_k で

---

[21] ここでは平面内の有界閉集合の場合のみを考えるが、この性質は一般のコンパクト集合に共通する性質である（章末の演習問題 5 も見よ）。

$$|z_k - w_k| \le \frac{1}{k}, \qquad |f(z_k) - f(w_k)| \ge \epsilon$$

を満たすものがある。

一方 E は有界だから、$\{z_k\}$ は集積点を持つ。部分列を考えて、数列 $\{z_k\}$ が E の 1 点 z に収束するとしてよい。このとき第一の条件より、$\{w_k\}$ も z に収束するが、第二の条件は $f(z)$ が z で連続でないことを意味するから仮定に反する。（証明終わり）

さて、予告してあった次の主張を証明しよう。

定理 1.18　求長可能な曲線 $C = \{z = z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}\}$ と、C 上連続な複素関数 $f(z)$ が与えられたとする。

任意の $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{t_j\}_{j=0}^{n}$ と、$\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ に関する近似和

$$S(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) \qquad (\zeta_j = z(\xi_j))$$

は、Δ の幅

$$m(\Delta) = \max_{j=1,\cdots,n} (t_j - t_{j-1})$$

が 0 になるように分割を動かせば、常に一定値 S に収束する。

[証明]　まず、$\zeta_j = z(\xi_j)$ の取りかたには（それほど）よらないことを示そう。実際、$f(z(t))$ は $[a,b]$ 上連続だから、一様連続である。特に、任意の $\epsilon > 0$ に対し適当に $\delta > 0$ を選べば、E の 2 点 t と t' が $|t - t'| < \delta$ を満たすとき常に

$$|f(z(t)) - f(z(t'))| < \epsilon$$

が成り立つ。したがって、$m(\Delta) < \delta$ であれば、ξ_j をかってな $\xi_j' \in [t_{j-1}, t_j]$ に取りかえて近似和 $S'(\Delta)$ を作っても、その差は高々

$$|S(\Delta) - S'(\Delta)| \le \sum_j |f(z(\xi_j)) - f(z(\xi_j'))||z_j - z_{j-1}| \le \epsilon L(C)$$

である。そこで以下では $\xi_j = t_j$ とする。

次に、Δ の細分 Δ^*、すなわち Δ^* が Δ を集合として含むもの、を作ったときも同様に、その差は高々

$$|S(\Delta) - S(\Delta^*)| \leq \epsilon L(C)$$

であることがわかる。したがって、$m(\Delta') < \delta$ を満たす他の任意の分割 Δ' に対しても、両方の分割点全体で得られる細分 $\Delta \cup \Delta'$ を考えれば、その差は高々

$$\begin{aligned}&|S(\Delta) - S(\Delta')|\\ \leq &|S(\Delta) - S(\Delta \cup \Delta')| + |S(\Delta \cup \Delta') - S(\Delta')| \leq 2\epsilon L(C)\end{aligned}$$

である。

特に $[a, b]$ を 2^k 等分する分割 Δ_k を考えれば、$\{S(\Delta_k)\}$ はコーシー列である、すなわち任意の $\epsilon > 0$ に対し適当に N を選べば $k \geq N$ かつ $k' \geq N$ なら常に

$$|S(\Delta_k) - S(\Delta_{k'})| < \epsilon$$

である。したがって、（命題 1.15 より）収束することがわかる。そこで、

$$S = \lim_{k \to \infty} S(\Delta_k)$$

とすれば、$m(\Delta) < \delta$ を満たす任意の分割 Δ に対しても

$$|S(\Delta) - S| \leq |S(\Delta) - S(\Delta_k)| + |S(\Delta_k) - S| \leq 3\epsilon L(C)$$

が成り立ち、主張を得る。　（証明終わり）

1.8　演習問題

1)　実数の順序を自然に、すなわち

1. 二つの数の間には $>$, $=$, $<$ のいずれかが成り立つ
2. $a > b$, $c > 0$ なら $a \pm c > b \pm c$, $ac > bc$ である

という性質を保ったまま、複素数に拡張することはできない。これを証明せよ。

2)　複素平面上の原点以外の相異なる 2 点 α と β を考える。α と β を通る直線を ℓ、原点から ℓ に引いた垂線と ℓ との交点を w とする。このとき、$w = \alpha\beta$ であるための必要十分条件は、α と β が中心 1/2 で半径 1/2 の円周上にあることである。これを示せ。

3)#　$[0,1]$ 上の関数

$$T(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 1/2) \\ 2(1-x) & (1/2 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

を**標準テント写像**という。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} T^k(x) = 4x(1-x)$$

を示せ[22]。

　また、

$$\mathrm{Tak}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} T^k(x)$$

を**高木関数**と呼ぶ。$\mathrm{Tak}(x)$ は連続だが、いたるところ微分可能でないことの説明を考えよ。

4)#　$[0,1]$ 上の関数[23]

$$T(x) = \begin{cases} 3x & (0 \leq x < 1/2) \\ 3(1-x) & (1/2 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

に対し、$T(x)$ で何度うつしても、その値が区間 $[0,1]$ に留まるような点全体の集合はカントールの 3 進集合と一致することを示せ。

5)*　ユークリッド空間の部分集合 E が**コンパクト**であるとは、任意の E の**開被覆**、すなわち開集合の族 $\{O_\lambda\}$ で $\bigcup_\lambda O_\lambda \supset E$ となるもの、から常にその有限個の元からなる部分開被覆が選べることである。このとき、次の**ハイネ・ボレルの定理**を示せ。

　ユークリッド空間の部分集合 E がコンパクトであることと、E が有界な閉集合であることとは同値である。

---

22 本書では $T^k(x)$ は常に $T(x)$ の k 回の反復合成を表していることに注意せよ。
23 このような写像もテント写像と呼ぶ。また 4 章第 1 節も参照せよ。

6)　複素平面内の有界閉集合 E が閉集合 F と共有点を持たなければ、それらの間には距離がある、すなわち、

$$d(E,F) = \inf\{|z-w| \mid z \in E, w \in F\} > 0$$

であることを示せ[24]。

7)$^{\#}$　五つの縮小相似変換

$$T_1(z) = \frac{1}{3}z, \qquad T_2(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}, \qquad T_3(z) = \frac{1}{3}z + i\frac{2}{3}$$

$$T_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}(1+i), \qquad T_5(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}(1+i)$$

に関する空集合でない最小の自己相似集合はどのような形か。

8)$^{\#}$　二つの縮小相似変換

$$T_1(z) = \frac{i}{2}z + 1, \qquad T_2(z) = \frac{i}{2}z - 1$$

に関する空集合でない最小の自己相似集合はカントール型であることを示せ。

また、$[-1,1]$ を $T_1(z)$ と $T_2(z)$ のあらゆる組み合わせの合成でうつしていったときの像の和集合はどのような形か。

9)$^{\#}$　二つの縮小相似変換

$$T_1(z) = \frac{2}{3}(-\overline{z} - 2i) + 2i, \qquad T_2(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right)(-\overline{z})$$

に関する空集合でない最小の自己相似集合を、**畑政義のフラクタル樹形**と呼ぶ。畑政義のフラクタル樹形とはどのような形か。

10)$^{\#}$　縮小相似変換の族 $\mathcal{T}$ に関する空集合でない最小の自己相似集合 E は $\mathcal{T}$ に対する複素平面での**アトラクタ**である。すなわち、任意の $z \in \mathbb{C}$ と $\mathcal{T}$ の元からなる任意の無限列 $\{T_k(z)\}$ に対して、点列 $\{z_k = T_k \circ \cdots \circ T_1(z)\}$ を考えれば、各 z_k と E との距離 $d(z_k, E) = d(\{z_k\}, E))$ は、$k \to \infty$ のとき常に 0 に収束する。これを示せ。

11)　等角性は、もっと素朴にも定義できる。すなわち、曲線 $C = \{z = z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}\}$ 上の点 $c = z(t_0)$ に対し、

---

[24] 集合 E の下限 $\inf E$ は、定義（2.2 節を見よ）から $-\sup\{-x \mid x \in E\}$ と一致する。

$$\lim_{t\,(>t_0)\to t_0} \arg(z(t)-c), \qquad \lim_{t\,(<t_0)\to t_0} \arg(c-z(t))$$

が共に定まり、かつ等しいとき、C は c で**接線を持つ**といい、その共通の値を c での**接線の傾き**という。2 曲線 C_1 と C_2 が、1 点 c で交わり、かつそこで接線を持つとき、その傾きの差を C_1 と C_2 が c で**なす角度**という。このとき、次の主張を証明せよ（再び図 1.5 も見よ）。

複素関数 $f(z)$ が 1 点 c で複素微分可能で $f'(c) \neq 0$ なら、$f(z)$ は c で上記の**角度を保つ**（このときも「等角である」と言われることも多い）：すなわち、2 曲線 C_1 と C_2 が、1 点 c で角度 θ をなすとき、それらの像 $f(C_1)$ と $f(C_2)$ も、点 $f(c)$ で角度 θ をなす。

12)　複素関数 $f(z) = \overline{z}$ は空集合でない任意の領域上で正則でないことを示せ。

13)　ある領域上で正則で、恒等的に $f'(z) = 0$ ならば、$f(z)$ は定数関数であることを示せ。また、$f(z)$ の実部が定数関数であっても、同じ結論が得られることを示せ。

14)　滑らかな（パラメータに関する実部と虚部の導関数が連続な）曲線は求長可能であることを示せ。

15)*　「有界変動関数」という概念を知っているものとして、曲線が求長可能であるのは、その実部と虚部が有界変動であることと同値であることを示せ。

第 2 章
止揚　メビウス変換と双曲幾何学

確かに、因陀羅の真珠図（クラインの泡模様）は、対称性についてのえもいわれぬ感覚を呼び起こしはするが、適切な数学的語彙なしには、この対称性の何たるかの正鵠を射ることはできない。

マンフォルド他

ぼくも、闇の隙間から出て、彼女とは反対の方角に歩き出す。理解出来ない地図をたよりに、歩きだす。もしかすると、彼女のところに辿り着くために・・・彼女とは反対の方角に、歩きだす。

『燃えつきた地図』安部公房

複素平面の完備化（可能無限の実無限化の一例）は 19 世紀初頭に Gauss によって認識されたとされている。しかし Gauss にとっては、その位相は思索の埒外にあった。実際、(Dedekind 切断により）実数が定義され (Weierstrass により）連続関数の基礎が築かれるのは 1870 年代のことである。

このような「実無限」の取りこみにより、相似変換の「メビウス変換」への変貌が可能になり、ユークリッド幾何学は唯一絶対性を失っていった。その「疾風怒涛」のなか Klein は幾何学の大改革（新生）計画に基づいて、19 世紀末までに Fricke らと共に膨大な研究結果を残したのである。

2.1　無限遠とリーマン球面

複素平面上に無い点を 1 点考え、∞ で表し、**無限遠点**と呼ぶ。複素平面 $\mathbb{C}$ に ∞ を加えた集合を**拡張された複素平面**といい、$\hat{\mathbb{C}}$ で表す。合同変換・相似変換や直線に関する鏡映変換も ∞ の像をそれ自身と定義することにより（すなわち、∞ は動かさないとすることにより）拡張された複素平面から

それ自身への**全単射**（上への1対1の写像）に拡張される。

注意　無限遠点も複素数のように加減乗除ができると見なす。ただし

$$a+\infty=\infty+a=\infty \quad (a\in\mathbb{C})$$

であり、$a\in\hat{\mathbb{C}}$ が 0 でなければ

$$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty$$

であるとする。また、

$$\frac{a}{0}=\infty \quad (a\neq 0), \qquad \frac{a}{\infty}=0 \quad (a\neq\infty)$$

と約束する。なお、

$$\infty+\infty, \quad \infty-\infty, \quad 0\cdot\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

は考えないことにする。

このように無限遠点を導入しても、複素平面との関係（位相）が自然に導入できなければ説得力がない。そのために「世界は丸い」という「現代の常識」の力を借りる。

まず、複素平面を実3次元 (x,y,t) 空間の中の (x,y)-平面 Π と考える。すなわち、複素数 $z=x+iy$ を点 $(x,y,0)$ と見なす。これを写し取る「地球儀」として、

$$\Sigma=\{(x,y,t)\mid x^2+y^2+(t-1/2)^2=1/4\}$$

あるいは

$$S^2=\{(x,y,t)\mid x^2+y^2+t^2=1\}$$

を考える。これらの「地球儀」での北極 N はどちらも点 $(0,0,1)$ である。

いずれの「地球儀」においても、北極 N と複素平面 Π 上の任意の点 z を通る直線は、「地球儀」と N 以外でただ1点で交わる。この点を $P(z)$ で表す。さらに $P(\infty)=N$ とすることで、「地球儀」の点と拡張された複素平面の点は1対1に対応がつく。拡張された複素平面からの、この写像を**立体射影**と呼ぶ（図 2.1）。またこの対応関係から、拡張された複素平面を**リーマ**

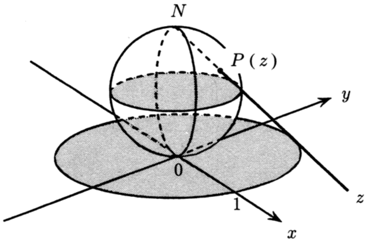


図 2.1　Σへの立体射影

ン球面ともいう。

定理 2.1

1. 立体射影 $P : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \Sigma$ は、$z = x + iy$, $P(z) = (\xi, \eta, \zeta)$ として、次の関数で与えられる。

$$\xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2} = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}},$$

$$\eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2} = \left(\frac{1}{2i}\right) \frac{z - \bar{z}}{1 + z\bar{z}},$$

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} = \frac{z\bar{z}}{1 + z\bar{z}}.$$

2. 立体射影 $P : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow S^2$ は次の関数で与えられる。

$$\xi = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} = \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}},$$

$$\eta = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} = -i\,\frac{z - \bar{z}}{1 + z\bar{z}},$$

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1}.$$

[証明]　立体射影 $P : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \Sigma$ の場合についてだけ、証明を述べておく。原点および任意の z が表す（空間の）点を O, Z とする。このとき

$$ON = 1, \quad OZ = |z|$$

であり、$Z' = P(z)$ に対し、OZ' は NZ と直交する。したがって、3角形 ONZ' は3角形 ZNO と相似で、$ON : OZ' = ZN : ZO$ だから

$$1 : OZ' = \sqrt{1+|z|^2} : |z|$$

を得る。すなわち

$$OZ'^2 = \frac{z\bar{z}}{1+z\bar{z}}$$

である。

一方、Z' は Σ 上の点だから、$OZ'^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2 = \zeta$、すなわち

$$\zeta = \frac{z\bar{z}}{1+z\bar{z}}$$

となる。さらに

$$\xi^2+\eta^2 = \zeta - \zeta^2 = \frac{z\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2}$$

で、かつ明らかに $\xi + i\eta$ は z と同じ偏角を持つから

$$\xi + i\eta = \frac{z}{1+z\bar{z}}$$

となり、主張を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

定義　リーマン球面において、無限遠点中心の半径 $r > 0$ の「円板」（球面上の北極中心の円板、すなわち北緯が一定値より大きい部分、に立体射影でうつる部分）[1]を、

$$\{|z| > 1/r\} \cup \{\infty\}$$

と定義する。無限遠点を含む開集合や無限遠点の近傍の定義も、この「円板」を用いれば、複素平面の点（通常の複素数）の場合と同様に与えることができる。

さらに、リーマン球面上の2点間の距離を、立体射影による球面上の2像点の3次元空間内での距離とするとき、これをリーマン球面上の**弦距離**と呼ぶ。また、2点 z と w の間の弦距離を

1　球面での形から、「球帽」とも呼ばれる。

$$\chi(z, w)$$

で表す。弦距離を与える公式は初等幾何学を用いれば簡単に導ける。

定理 2.2　リーマン球面上の 2 点 z と w の弦距離 $\chi(z, w)$ は（Σ で考えるとき）、次式で与えられる。

$$\chi(w, z) = \frac{|w - z|}{\sqrt{1 + |w|^2}\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

ただし、例えば $w = \infty$ のときは

$$\chi(\infty, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}$$

となる。

[証明]　z と w が表す 2 点 Z と W に対し、対応する Σ 上の 2 点を $Z' = P(z) = (\xi, \eta, \zeta)$ と $W' = P(w)$ とする。ここで $T = (0, 0, \zeta)$ とすると、まず 3 角形 $Z'NT$ は 3 角形 ZNO と相似だから

$$NZ' = (1 - \zeta)NZ = (1 - \zeta)\sqrt{1 + |z|^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}$$

を得る。すなわち、第 2 式が示せた。

次に、$NZ' \cdot NZ = NW' \cdot NW = 1$ より、

$$Z'W' = \frac{Z'N}{WN}|z - w| = \frac{|w - z|}{\sqrt{1 + |w|^2}\sqrt{1 + |z|^2}}$$

を得る。　（証明終わり）

注意　定理の表示式から

$$\lim_{|w| \to +\infty} \chi(w, z) = \chi(\infty, z)$$

が成り立つこともわかる。

弦距離はわかりやすいが、球面上で決まる距離ではない。そこで、通常は、球面上での「最短経路」の長さが、距離として用いられる。

リーマン球面上の曲線 C の、**球面計量に関する長さ** $L_s(C)$ は、C が

$$z = z(t) : [a,b] \to \hat{\mathbb{C}}$$

と表示されているとして、

$$L_s(C) = \int_C \frac{|dz|}{1+|z|^2} = \sup_{\{t_j\}_{j=0}^n} \sum_{j=1}^n \frac{|z(t_j) - z(t_{j-1})|}{1+|z(t_j)|^2}$$

により定義される。ただし、$\{t_j\}_{j=0}^n$ は $[a,b]$ のすべての分割を動くものとする。球面計量に関する長さが有限のとき、C を求長可能と呼ぶ。（1章5節も参照せよ。）

注意 直観的には、この積分は微小な移動 $w = z + \delta(z)$ の際の弦距離の変化

$$\frac{|\delta(z)|}{1+|z|^2}$$

の総和と考えられる。特に C が滑らかな曲線のときは

$$L_s(C) = \int_a^b \frac{|z'(t)|}{1+|z(t)|^2} dt$$

である。

定義 リーマン球面上の2点 z と w の（Σ に関する）**球面距離** $\rho(z,w)$ は、z と w を結ぶ求長可能な曲線の球面計量に関する長さの下限[2]により定義する。すなわち、

$$\rho(z,w) = \inf_C L_s(C)$$

である。ただし、C は z, w を結ぶ求長可能な曲線全体を動く。

もちろん（常識的には明らかなように）実際に球面距離と長さが等しい「最短経路」（測地線）がある。

定理 2.3 リーマン球面上の異なる2点 z_0 と z_1 を結ぶような球面距離に

---

[2] 実数の集合 E の**下限**とは、$E \subset [y, +\infty)$ となる実数 y の最大値である。なお、E がいくらでも小さい数を含むときは、E の下限を $-\infty$ と約束する。（さらに1章末の演習問題 6 も見よ。）

関する最短曲線は、常に見つかる。具体的には、その2点を通る大円[3]の長くない方の弧（劣弧）である。

注意 2点 z_0 と z_1 が対心点（すなわち、球のある直径の両端点）の場合を除けば、このような最短曲線は一意に定まる。

[証明] まず球面距離は明らかに球の直径を回転軸とする回転で不変だから、そのような回転を施して、z_0 を原点にうつす。このとき、原点と z_1 の回転後の像を結ぶ任意の曲線 C に対し、3角不等式

$$|z(t_j) - z(t_{j-1})| \geq ||z(t_j)| - |z(t_{j-1})||$$

より

$$L_s(C) = \int_C \frac{|dz|}{1+|z|^2} \geq \int_C \frac{d|z|}{1+|z|^2} \geq \int_I \frac{d|z|}{1+|z|^2}$$

を得る。ここで、I は原点と z_1 を結ぶ線分または半直線である。

さらに、等号は $z_1 \neq \infty$ ならば、$z(t)$ の偏角が一定でかつ $r(t) = |z(t)|$ が単調増加であるとき、すなわち $C = I$ のときに限ることも、上記の不等式からわかる。

したがって、最初の回転の逆写像で元へ戻せば、主張を得る。

（証明終わり）

2.2 円周に関する鏡映変換とメビウス変換

さて、球面上で複素共役を見直そう。

例 2.1 複素共役は、実軸に対応する球面上の大円を含む鉛直な平面に関する（空間の）鏡映変換

$$(\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi, -\eta, \zeta)$$

に対応する。すなわち、「東西」半球面の入れ替えである。

---

3 球の中心を通る平面と球面との交わりを**大円**と呼ぶ。

定義

$$I(z) = \frac{1}{\bar{z}} \qquad (I(0) = \infty,\ I(\infty) = 0)$$

を**基本鏡映変換**と呼ぶ。また基本鏡映変換と複素共役との合成

$$J(z) = \frac{1}{z} \left(= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right)$$

を**対合**と呼ぶ。

基本鏡映変換は、球面上の赤道にあたる大円を含む平面に関する（空間の）鏡映変換、すなわち単位球面 S^2 の場合には

$$(\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi, \eta, -\zeta)$$

に対応する。すなわち、南北半球面の入れ替えである。

これが、複素共役と同等の基本変換として、$I(z)$ を考える根拠である。さらに、一般の円周に関する球面の「入れ替え」も自然に定義できる。

定義　一般に、中心が α で半径 r の**円周** C **に関する鏡映変換** $R(z)$ は

$$R(z) = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{\alpha}} + \alpha$$

の形で与えられる変換である（ただし、$R(\alpha) = \infty, R(\infty) = \alpha$ である）。

命題 2.4 (円円対応)　任意の円周に関する鏡映変換は、リーマン球面上で適当な相似変換 $S(z)$ により基本鏡映変換と**共役**である。すなわち、$S \circ I \circ S^{-1}(z)$ と表示できる。

特に、任意の円周に関する鏡映変換は円周または直線（∞ を含む）を円周または直線（∞ を含む）にうつす。

[証明]　中心が α で半径 r の円周 C に関する鏡映変換は、$S(z) = rz + \alpha$ とおけば、定義より $S \circ I \circ S^{-1}(z)$ に等しい。

後半の主張は、基本鏡映変換については容易に示せ、相似変換については明らかであるから、前半にある表示ができることから後半の主張もわかる。

（証明終わり）

定義　相似変換または対合の有限回の合成、すなわち $R_j(z)$ を相似変換また

は対合として、

$$R_1 \circ \cdots \circ R_n(z)$$

の形の変換を**メビウス変換**と呼ぶ。メビウス変換全体の集合を Möb($\hat{\mathbb{C}}$) と書く。

また以下簡単のため、**直線も（∞ を含む）「（リーマン球面上の ∞ を通る）円周」と呼ぶ**ことにする。

系 2.5　メビウス変換は（リーマン球面上の）円周を円周にうつす。

定理 2.6　任意のメビウス変換は

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0)$$

の形に表せる。ただし、$T(\infty) = a/c$, $T(-d/c) = \infty$ とする。

逆に、このような表示を持つ変換はメビウス変換である。

[証明]　相似変換または対合の有限回の合成がこのような表示を持つことは容易にわかる。逆に、任意の

$$\frac{az+b}{cz+d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0)$$

と表示される変換は、$c = 0$ ならば 1 次式であるから相似変換である。$c \neq 0$ のときは、相似変換 $z \mapsto cz + d$、対合、およびもう一つの相似変換 $z \mapsto ((bc - ad)/c)z + a/c$ の三つの変換の合成であるからメビウス変換である。　（証明終わり）

系 2.7　任意のメビウス変換は、平行移動、原点中心の回転移動と伸縮、あるいは対合の有限回の合成として表せる。

例 2.2　定理 2.6 の表示で

1. $a = d$ かつ $c = 0$ の場合が、平行移動である。
2. $b = c = 0$ の場合は、原点を中心とする伸縮と回転移動を表す。
3. $a = d = 0$ かつ $b = c$ の場合が対合である。

メビウス変換は 1 次式の商として書けるから、その係数の定める行列を使って表すこともできる。このとき、メビウス変換を表す 1 次式の商の係数に一斉に 0 でない複素数を掛けても、メビウス変換そのものは変わらない。したがって、はじめから行列式は 1 としてよい。そこで、次の集合を考える。

定義

$$SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc = 1 \right\}.$$

で定義される集合を 2 次の**特殊線型群**と呼ぶ。

ここで、「群」とは「積」[4]が定義された集合である。

定義　集合 G に対し、集合 $\{(g,h) \mid g, h \in G\}$ から G への写像 $(g,h) \mapsto g * h$ が与えられているとする。この $*$ が次の条件を満たすとき、G は「積」$*$ に関する**群**であるという。

1. $*$ は結合法則を満たす。すなわち

$$(g * h) * k = g * (h * k)$$

　が、G の三つの元からなる任意の順列 (g, h, k) に対して成り立つ。

2. 単位元がある。すなわち，G の元 e で

$$g * e = e * g = g$$

　が、任意の元 $g \in G$ に対して成り立つものがある。

3. 任意の G の元 g に対して、逆元 g^{-1}、すなわち

$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$$

　を満たす G の元 g^{-1} がある。

例えば、$SL(2,\mathbb{C})$ は、行列の積を「積」として群になる。特に、単位元は

[4] 単に以下の条件を満たす演算というだけで、通常の積とは無関係である。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、上記の A の逆元は

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である。

同様に、メビウス変換の全体 $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ は合成を「積」として群である。

課題　$SL(2,\mathbb{C})$ や $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ が群になることを確かめよ。また、係数を実数や整数に制限した

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc=1 \right\}$$

および

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc=1 \right\}$$

が行列の積を「積」として群になることを示せ（ただし、$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す)。

定義　$SL(2,\mathbb{C})$ の任意の行列 A と $-A$ との対を一つの元と見なした集合を $PSL(2,\mathbb{C})$ で表す。

この $PSL(2,\mathbb{C})$ にも行列の積から自然に「積」$\cdot$ が定義できて群になるが、さらに次の定理が成り立つ。

命題 2.8　$\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ は $PSL(2,\mathbb{C})$ と（群として）**同型**である。すなわち、全単射 $\iota : \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) \mapsto PSL(2,\mathbb{C})$ で、$\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ の任意の 2 元 T と S に対し

$$\iota(T)\cdot\iota(S) = \iota(T \circ S)$$

が成り立つものがある。

[証明]　任意の $SL(2,\mathbb{C})$ の元

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対し、メビウス変換

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

が、また

$$T(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

とも表せたとすると、$T(0), T(\infty), T^{-1}(0)$ を考えれば

$$bd' = b'd, \quad ac' = a'c, \quad ab' = a'b$$

がわかり、

$$a = ka', \quad b = kb', \quad c = kc', \quad d = kd'$$

となる複素数 $k \neq 0$ の存在がわかる。さらに、行列式が 1 であることから $k^2 = 1$ となり、k は 1 か -1 である。これは、この $T(z)$ から行列の対 $\{A, -A\}$ への対応が求める全単射であることを意味する。　（証明終わり）

定義　メビウス変換 $T(z)$ に対応する $SL(2,\mathbb{C})$ の元 A または $-A$ を、$T(z)$ の**行列表現**と呼ぶ。

さて、メビウス変換にとって基本的な量として、非調和比がある。

定義　リーマン球面上の相異なる 4 点 a, b, c, d の**非調和比**は

$$(a,b,c,d) = \frac{a-c}{b-c}\,\frac{b-d}{a-d}$$

で定義される。ただし、1 点が ∞ の場合は、適当な極限で定義する。例えば $a \to \infty$ とすれば

$$(\infty,b,c,d) = \frac{b-d}{b-c}$$

である。

定理 2.9 異なる 4 点の非調和比はメビウス変換により不変である。すなわち、任意の異なる 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 とメビウス変換 $T(z)$ に対し

$$(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

が成り立つ。

[証明] $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ とおけば

$$T(z_i) - T(z_j) = \frac{(ad-bc)(z_i - z_j)}{(cz_i + d)(cz_j + d)}$$

であるから、主張は容易に確かめられる。 (証明終わり)

これから特に、メビウス変換で 3 点までは自由に移動させることができる。

系 2.10 任意の異なる 3 点 z_1, z_2, z_3 を任意の異なる 3 点 w_1, w_2, w_3 にうつすメビウス変換がただ一つだけ見つかる。

[証明] 実際、

$$(w_1, w_2, w_3, T(z)) = (z_1, z_2, z_3, z)$$

により $T(z)$ を定義すればよい（命題 2.13 も見よ）。 (証明終わり)

系 2.10 は、非調和比によってメビウス変換が表示できることも述べている。さらに、鏡映変換もまた非調和比を使って表せる。

命題 2.11 リーマン球面上の円周 C に関する鏡映変換 $R(z)$ は、C 上の任意の異なる 3 点 a, b, c に対する関係式

$$(a, b, c, R(z)) = \overline{(a, b, c, z)}$$

により決定される。

[証明] まず、C が直線のときは、命題 1.6 の表示式

$$\frac{R(z) - a}{c - a} = \overline{\left(\frac{z-a}{c-a}\right)}$$

と

$$\frac{R(z)-b}{c-b} = \overline{\left(\frac{z-b}{c-b}\right)}$$

の両辺それぞれの商を取れば、非調和比の表示式

$$(a,b,c,z) = \frac{a-c}{b-c}\,\frac{b-z}{a-z}$$

から、求める等式が得られる。逆は、例えば $a=\infty$ とすれば、表示式そのものである。

次に、C が複素平面上の α を中心とする半径 r の円周であるときは

$$R(z) = \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{\alpha}} + \alpha$$

であり、定理 2.9 から特に非調和比は平行移動で不変だから

$$\begin{aligned}\overline{(a,b,c,z)} &= \overline{(a-\alpha, b-\alpha, c-\alpha, z-\alpha)} \\ &= \left(\frac{r^2}{a-\alpha}, \frac{r^2}{b-\alpha}, \frac{r^2}{c-\alpha}, \bar{z}-\bar{\alpha}\right)\end{aligned}$$

となる。ここで非調和比が、メビウス変換 $z \mapsto r^2/z$ で不変なことを使えば

$$\overline{(a,b,c,z)} = \left(a-\alpha, b-\alpha, c-\alpha, \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{\alpha}}\right) = (a,b,c,R(z))$$

を得る。逆も同様にたどれ、a,b,c は C 上任意なので主張を得る。

（証明終わり）

次の系は、メビウス変換が鏡映変換に関する対称性を持っていることを主張している。

定理 2.12 (鏡像原理) リーマン球面上の円周 C_1 を円周 C_2 にうつすメビウス変換 $T(z)$ に対し、次の等式が成り立つ。ただし、 $R_j(z)$ は C_j に関する鏡映変換とする。

$$T(R_1(z)) = R_2(T(z)).$$

[証明]　非調和比の不変性（定理 2.9 ）と命題 2.11 より、C_1 上の任意の異

なる 3 点 a, b, c に対し、

$$(T(a), T(b), T(c), T(R_1(z))) = (a, b, c, R_1(z)) = \overline{(a, b, c, z)}$$
$$= \overline{(T(a), T(b), T(c), T(z))} = (T(a), T(b), T(c), R_2(T(z)))$$

が成り立つ。$T(a), T(b), T(c)$ は C_2 上で任意に取れるから、これは

$$R_2(T(z)) = T(R_1(z))$$

を意味している。（証明終わり）

さて、メビウス変換が、合同変換や相似変換とどのように似ているかを理解するには、そのグラフ（すなわち、写像の様子）を追跡してみるべきであろう。それは次節で述べるが、ここではその準備としてメビウス変換の分類を与える。

定義　リーマン球面上の 1 点 z_0 が写像 $f(z)$ の**固定点**であるとは、$f(z_0) = z_0$ が成り立つことである。

命題 2.13　恒等変換でない任意のメビウス変換 $T(z)$ に対し、リーマン球面上の固定点の個数は 1 または 2 である。

課題　命題 2.13 を示せ。

定理 2.14　恒等変換でない任意のメビウス変換 $T(z)$ は、二つの異なる固定点を持つときには適当なメビウス変換 $A(z)$ による共役を取れば

$$A \circ T \circ A^{-1}(z) = \alpha z \quad (\alpha \in \mathbb{C} - \{0, 1\})$$

とでき、一つの固定点しか持たないときは適当なメビウス変換 $A(z)$ による共役を取れば

$$A \circ T \circ A^{-1}(z) = z + \beta \quad (\beta \in \mathbb{C} - \{0\})$$

とできる。

すなわち再び、複素数倍（回転移動と伸縮）と平行移動に戻ってきたのである。

[証明]　まず、$T(z)$ が二つの固定点 a と b を持つときは、(他の場合も同様なので、a と b ともに ∞ でないとして)

$$A(z) = \frac{z-b}{z-a}$$

とすれば、$T_1(z) = A \circ T \circ A^{-1}(z)$ は 0 と ∞ を固定する。$\alpha = T_1(1)$ とすれば $T_1(z) = \alpha z$ である。

次に、ただ一つの固定点 a を持つときは、(やはり $a \neq \infty$ として)

$$A(z) = \frac{1}{z-a}$$

とすると、$A(z)$ による共役を取れば平行移動となる。　(証明終わり)

定義　定理 2.14 の表示を $T(z)$ の**標準形**と呼ぶ。

ここで、恒等変換でない $T(z)$ の標準形が $z \mapsto \alpha z$ で、$\alpha > 0$ なら、$T(z)$ は伸縮に共役だが、このとき $T(z)$ は**双曲型**であるという。$|\alpha| = 1$ のときは回転移動に共役だが、**楕円型**であるという。$|\alpha| \neq 1$ に対応する $T(z)$ は一般には回転移動と伸縮が混じっていて、**斜航的**であると呼ばれる（双曲型の変換も斜航的変換に含める）[5]。最後に、平行移動を標準型に持つ $T(z)$ は**放物型**であるという。

例 2.3　対合 $I(z)$ は固定点 ± 1 を持つ楕円型変換である：

$$\frac{I(z)+1}{I(z)-1} = -\frac{z+1}{z-1}$$

この場合はさらに、球面の通常の半回転である。

注意　メビウス変換を

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1$$

と表すとき、行列表現のトレースの 2 乗 $\mathrm{tr}^2(T) = (a+d)^2$ は行列表現を取りかえても、またメビウス変換で共役を取っても変わらない。さらに恒等変換でない $T(z)$ が

1. 放物型のときは $\mathrm{tr}^2(T) = 4$

---

5 斜航的な変換をすべて双曲型と呼ぶこともある。

2. 双曲型のときは $\mathrm{tr}^2(T)(=(\sqrt{\alpha}+1/\sqrt{\alpha})^2)=\alpha+\alpha^{-1}+2>4$
3. 楕円型のときは $0\leq \mathrm{tr}^2(T)=4\cos^2(\arg\alpha/2)<4$
4. 斜航的ならば $\mathrm{tr}^2(T)$ は実軸上の区間 $[0,4]$ に含まれない

となる。逆も成り立つことは容易にわかるから、メビウス変換の 1 から 3 の型は、行列表現のトレースの絶対値により判別できる。実はこの値は幾何学的にも重要な意味を持っている。

2.3　メビウス変換による等角写像

写像としてのメビウス変換を幾何学的に理解するには、シュタイナー円周族と呼ばれる、互いに直交する円周の族（集合）を取り、これらを軸平行な直線族のように使う表現を用いることが多い（古くには「円把」とも呼ばれた）。

まず、次の事実は複素微分の定義に戻れば容易に示せる。

命題 2.15　任意のメビウス変換

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

は、$z=-d/c$ を除く全複素平面上で正則で、

$$T'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0$$

である。

系 2.16　領域 D がメビウス変換 $T(z)$ により複素平面内にうつされるなら、$T(z)$ は D の各点で等角である。

系 2.17　二つの円周が交わるとき、その交わる角度は任意のメビウス変換 $T(z)$ により保たれる。

課題　系 2.17 を証明せよ。(無限遠点もその逆像 $T^{-1}(\infty)$ も二つの円周の交点でないなら、系 2.16 からわかる。一方、立体射影がこのような角度を保つことは初等幾何学で示せるから、対合 $I(z)$ が球面の通常の半回転であ

ることを利用して、$T(I(z))$ 等を考えれば無限遠点での主張が示せる[6]。)

以上の議論を踏まえて、等角写像を以下のように定義する[7]。

定義　リーマン球面上の領域 D の**等角写像** $f(z)$ とは、リーマン球面への**単射**な（1対1の）連続写像で、

1. $\infty, f^{-1}(\infty)$ を D から除いた領域上正則かつ $f'(z)$ がその上で 0 にならず、
2. $\infty \in D$ のときは、$f(\infty) \neq \infty$ なら $f(I(z))$、$f(\infty) = \infty$ なら $I(f(I(z)))$ が、0 で複素微分可能かつ微分係数が 0 でなく、
3. $\infty \in f(D - \{\infty\})$ のときは $I(f(z))$ が $f^{-1}(\infty)$ で複素微分可能かつ微分係数が 0 でない

ものである。

課題　メビウス変換が $\hat{\mathbb{C}}$ の等角写像であることを示せ。

例 2.4　$\mathbb{C}$ 上の2点 a と b を固定点にもつ楕円型変換は

1. a と b を通る任意の円周

$$\{a,b\} \bigcup \left\{ \arg \frac{z-b}{z-a} = k \pmod{\pi} \right\} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

をやはり a と b を通る異なる円周の上にうつし、

2. a と b からの距離の比が一定の点からなるアポロニウスの円周

$$\left\{ \left| \frac{z-b}{z-a} \right| = k' \right\} \qquad (k' > 0)$$

をそれ自身の上にうつす。(図 2.2 を見よ。)

これらの円周の族は、メビウス変換

$$A(z) = \frac{z-b}{z-a}$$

---

[6] 等角性を正則性の文脈で論じるなら、リーマン球面を複素多様体（リーマン面）と考える視点をまず導入しなければならない。この手法に付いては6章で触れる。

[7] 一般的には「リーマン面からリーマン面への単射な正則写像」と定義できるが、このとき実は逆写像も正則になる（3章6節を見よ）ので、**双正則写像**とも呼ばれる。

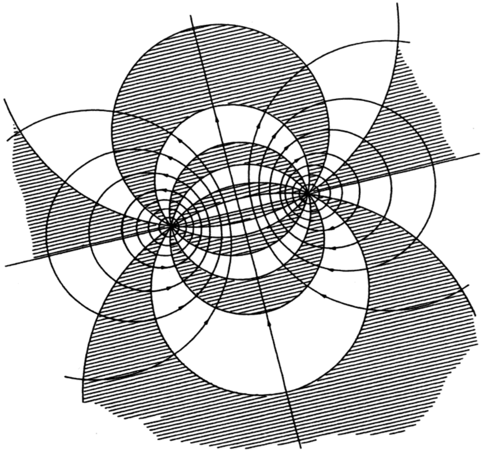


図 2.2　楕円型変換によるシュタイナー円周族とそのうつりかた

により、それぞれ、原点を通る直線の族と原点中心の同心円周の族にうつる。これらは互いに直交し、系 2.17 から、上述の円周の族も互いに直交することがわかる。

このような互いに他の族内の円周に直交しているような二つの円周族を、**シュタイナー円周族**という。

例 2.5　$\mathbb{C}$ 上の 2 点 a と b を固定点にもつ双曲型変換は

1. a と b を通る任意の円周をそれ自身の上にうつし、
2. a と b からの距離の比が一定の点からなるアポロニウスの円を比の異なるアポロニウスの円の上にうつす。(図 2.3 を見よ。)

例 2.6　$\mathbb{C}$ 上の 1 点 a を固定点にもつ放物型変換に対しては、a を通る円周のみからなるシュタイナー円周族 $\{C\}$ と $\{D\}$ で

1. $\{C\}$ の任意の円周をそれ自身の上にうつし、
2. $\{D\}$ の任意の円周を $\{D\}$ 内の異なる円周の上にうつす

ものがある。(図 2.4 を見よ。)

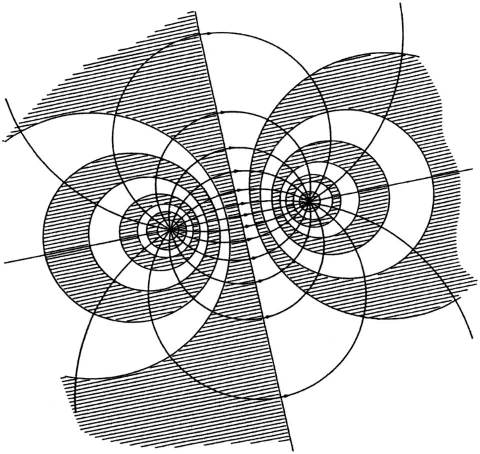


図 2.3　双曲型変換によるシュタイナー円周族とそのうつりかた

注意　一般に、斜航的な変換に対しても楕円型や双曲型の場合と同様のシュタイナー円周族が使えるが、変換で不変な曲線は一般には両側に螺旋状に固定点まで延びてゆく曲線になる。

このような円周の対応を見れば、簡単な場合には写像の様子を読み取ることができる。そのような例を述べる。

例 2.7 (ケーリー変換)　単位円板は、メビウス変換

$$w = C(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

により、右半平面上に等角に写像される。

実際 $C(z)$ は $\pm i$ を固定点にもち、i のまわりでの 1/4 回転を表すメビウス変換である：

$$\frac{w-i}{w+i} = i\,\frac{z-i}{z+i}.$$

したがって、単位円板は右半平面にうつされる。

命題 2.18　複素平面上の共通点を持たない二つの閉円板に対し、それらの

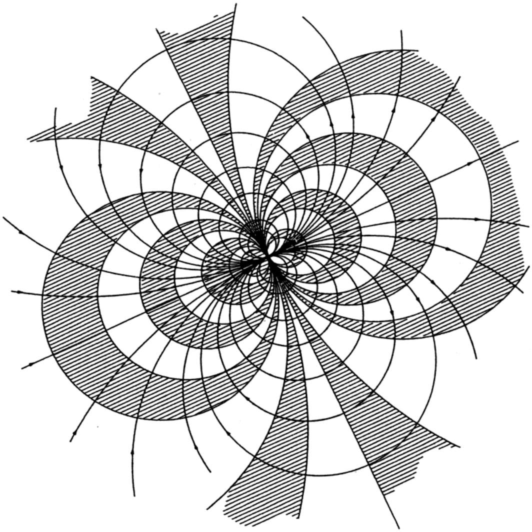


図 2.4　放物型変換に対するシュタイナー円周族

リーマン球面での補集合は、適当なメビウス変換により、二つの同心円周で囲まれた領域上に等角写像される。

特に、一方の円周の内側を、他方の円周の外側（無限遠点を含む）にうつす双曲型メビウス変換がみつかる。

[証明]　まず、必要ならメビウス変換でうつして、二つの円周が、中心を実軸上に持つ円周であるとしてよい。そこで、これらの 2 円周が同じ 2 点に関するアポロニウスの円であるような、そんな 2 点を見つければよい。

そのため、さらにメビウス変換でうつして、実軸と一方の円周との交点が ± 1 で、もう一方との交点が p と q で、さらに $p < -1 < 1 < q$ としてよい。このとき、メビウス変換

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2,\mathbb{R})$$

で、

$$T(\pm 1) = \pm 1, \quad k = -T(p) = T(q) \ (> 1)$$

を満たすものがあることは、計算でわかる。一方、与えられた二つの円周は実軸と直交するが、$T(z)$ は実軸をそれ自身にうつすから、$T(z)$ によるこれらの円周の像も実軸に直交し、原点中心で半径 1 と k の同心円周となる。

後半のメビウス変換としては、伸縮 $z \mapsto kz$ の、前半で得られたメビウス変換の逆変換よる共役を取ればよい。　（証明終わり）

なお、証明中に以下の主張も示した。

系 2.19　実軸 $\mathbb{R}$ の異なる 4 点に対し、（上半平面をそれ自身にうつす）実係数のメビウス変換で、その 4 点を、$-k, -1, 1, k \quad (k > 1)$ の形の 4 点にうつすものがある。

なお、一般に次の事実が成り立つ。

命題 2.20　任意の二つの円板 D_1 と D_2 の一方 D_1 を D_2 の閉包の（リーマン球面での）補集合上に等角写像するメビウス変換がある。

[証明]　D_1 の境界上の異なる 3 点を、D_1 を左側に見ながら回る順に取ると、その 3 点を、D_2 の境界上で D_2 を右側に見ながら回る順に並ぶ異なる 3 点にうつすようなメビウス変換が見つかる（非調和比を用いればよい）。これが求めるものであることは、円円対応から容易にわかる。（証明終わり）

2.4　連分数展開

定義　整数の列 $\{k_j\}$ により

$$\omega = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \ddots}}}$$

の形に表される実数を**連分数**という。

さらに、無理数 ω の**連分数展開**というときには、$\omega_0 = \omega$ とし、

$$\omega = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \ddots \frac{1}{\omega_n}}}$$

と表示するとき、各 $n \geq 1$ に対し k_n は整数で $k_n \geq 1$ かつ $\omega_n > 1$ を仮定する。すなわち、ω_n が決定したとき、$k_n < \omega_n < k_n + 1$ を満たす正の整数 k_n を取り、

$$\omega_n = k_n + \frac{1}{\omega_{n+1}}$$

により、ω_{n+1} を定めるという操作を繰り返すこととする。

命題 2.21

$$\omega = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \ddots \frac{1}{\omega_n}}} = \frac{p_n\omega_n + p_{n-1}}{q_n\omega_n + q_{n-1}}$$

とするとき、p_n と q_n は以下の漸化式で定まる。

$$\begin{aligned} &p_0 = 1, && p_1 = k_0, && p_n = p_{n-1}k_{n-1} + p_{n-2} \\ &q_0 = 0, && q_1 = 1, && q_n = q_{n-1}k_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned}$$

[証明] まず、$n = 1$ のときは

$$k_0 + \frac{1}{\omega_1} = \frac{p_1\omega_1 + p_0}{q_1\omega_1 + q_0}$$

で成り立つ。次に n のとき成り立つ、すなわち

$$k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \ddots \frac{1}{\omega_n}}} = \frac{p_n\omega_n + p_{n-1}}{q_n\omega_n + q_{n-1}}$$

とする。この式に $\omega_n = k_n + \frac{1}{\omega_{n+1}}$ を代入すれば、上記の漸化式により定まる p_{n+1} と q_{n+1} により、

$$k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \ddots \frac{1}{\omega_{n+1}}}} = \frac{p_{n+1}\omega_{n+1} + p_n}{q_{n+1}\omega_{n+1} + q_n}$$

が成り立つことがわかる。（証明終わり）

注意　したがって、p_n と q_n はそれぞれ $k_0, \cdots, k_{n-1}$ の多項式と $k_1, \cdots, k_{n-1}$ の多項式であるが、同じ規則で定まるので

$$p_n = [k_0, \cdots, k_{n-1}], \qquad q_n = [k_1, \cdots, k_{n-1}]$$

と表される。

定義

$$r_n = \frac{p_n}{q_n}$$

で定まる数列を無理数 ω の**近似分数列**という。

ここで p_n と q_n の漸化式から、近似分数列はメビウス変換

$$T_n(z) = \frac{p_n z + p_{n-1}}{q_n z + q_{n-1}}$$

を用いて

$$r_{n+1} = T_n(k_n)$$

とも表せるが、次の事実は基本的である。

補題 2.22

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

の行列式は　$(-1)^n$ である。

[証明]　漸化式から

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \cdots = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} k_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n\end{aligned}$$

を得る。　（証明終わり）

系 2.23

$$k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \ddots \frac{1}{k_n}}} = r_{n+1}$$

であり、さらに

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \omega$$

である。

[証明]　定義より $q_n > 0$ で、

$$\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$$

は容易にわかる。また $\omega_n > k_n$ だから

$$\left|\omega - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{q_n(q_n\omega_n + q_{n-1})}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

となり主張を得る。　（証明終わり）

例 2.8 (黄金比)　$x^2 - x - 1 = 0$ の正の解 ω を**黄金比**という。ω は

$$x = M(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

の正の解、すなわち $M(z)$ の固定点であるから、その連分数展開は

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

となる。特に対応する $\{p_n\}$ と $\{q_n\}$ は**フィボナッチ数列**である。

例 2.9　$\omega = \sqrt{3}$ の場合には、

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad \omega_2 = \sqrt{3}+1$$

で以下その繰り返しである。したがって

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

となる。

ここで、ω_1 は $2x^2 - 2x - 1 = 0$ の正の解であるから、

$$x = M(x) = \frac{3x+1}{2x+1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}$$

すなわち $M(z)$ の固定点と考えても、連分数展開を得る。

このように、あるメビウス変換の固定点として 2 次方程式の解が得られるという事実は、連分数展開の周期性を含意する。

定義　整数係数の 2 次方程式の無理数解を **2 次の無理数**という。

また、連分数展開において、その係数 k_n があるところから先は循環する（周期的に変化する）とき、連分数展開は**前周期的**であるという[8]。

[8] この場合には、周期的ならば前周期的であるとする。

定理 2.24 実数 θ が 2 次の無理数であることと θ の連分数展開が前周期的であることとは同値である。

証明のためにまず、成分が整数で行列式が ± 1 である行列に対応するメビウス変換でうつりあう二つの複素数は**対等である**ということにする。このような変換は $PSL(2,\mathbb{Z})$ の元か、または対合と合成すれば $PSL(2,\mathbb{Z})$ に入る。したがって、対合および $PSL(2,\mathbb{Z})$ の生成元（章末の演習問題 10 を見よ）に対して直接計算すれば次の補題がわかる。

補題 2.25 2 次の無理数に対等な複素数は、元の無理数に対応する整数係数の 2 次方程式の判別式と同じ判別式を持つ適当な整数係数の 2 次方程式の解（したがって 2 次の無理数）である。

定理の証明に戻る。連分数展開に対応して、方程式を変換する。すなわち、ω と ω' を整数係数の 2 次方程式 $f(z)=0$ の二つの無理数解で、$\omega' < \omega$ を満たすとする。

$$\omega = k_0 + \frac{1}{\omega_1}$$

に対応して、$f_1(x) = x^2 f(k_0 + \frac{1}{x})$ を作れば、ω_1 と、ω' から同様の変換で得られる ω'_1 が $f_1(x)=0$ の 2 解である。以下、ω の連分数展開に対応してこのような変換を繰り返せば、2 次式の列 $f_n(x)$ と対応する解 ω_n と ω'_n が得られる。作りかたより、これら 2 解はもとの 2 解と対等である。

また前述と同様に、

$$\omega' = \frac{p_n\omega'_n + p_{n-1}}{q_n\omega'_n + q_{n-1}}$$

であり、$p_n/q_n \to \omega$ より、

$$\omega'_n = -\frac{q_{n-1}}{q_n}\frac{\omega' - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{\omega' - \frac{p_n}{q_n}}$$

はやがて、負になる。そのような n に対しては

$$\omega'_{n+1} = \frac{1}{\omega'_n - k_n}$$

より、$-1 < \omega'_{n+1} < 0$ が成り立つ。このとき $\omega_{n+1}\,(>1)$ は簡約されてい

るということにすると、簡約されている2次の無理数で、同じ判別式を持つ2次式に対応するものは有限個しかないことを示せば、主張を得る。

そこで、$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ の正解が簡約されているとする。また、$f(x)$ の判別式を $D\,(> 0)$ とする。さらに、$a > 0$ としてよいが、このとき2解 ω と ω' の仮定と、解と係数の関係から $-b > 0$ かつ $c < 0$ でなければならない。したがって、$D = b^2 - 4ac = |b|^2 + 4|a||c|$ だから整数 a, b, c の取りうる値は有限個しかない。　（証明終わり）

2.5　クラインの泡模様（因陀羅の真珠図）#

有限個のメビウス変換あるいは鏡映変換から1章3節のようにリーマン球面内の「自己不変集合」を構成することができる。このような例をいくつか紹介する。1.3節では「線分」によるフラクタル集合を与えたが、ここでは「円弧」が主役となる。

例 2.10 (ショットキィの塵)　二つの双曲型メビウス変換

$$T(z) = \frac{z}{6}, \qquad S(z) = \frac{17z + 15}{15z + 17}$$

に対し、

$$E = T(E), \qquad E = S(E)$$

を満たす空でない最小の閉集合 E を**ショットキィの塵集合**と呼ぶ。この集合 E はカントール型の閉集合である。

この例についてもう少し詳しく説明しよう。まず $T(z)$ や $S(z)$ は全単射であるから、

$$E = T^{-1}(E), \qquad E = S^{-1}(E)$$

でもある。次に、$T(z)$ は原点と無限遠点を固定する双曲型変換で、$S(z)$ は ± 1 を固定点に持つ双曲型変換である：

$$\frac{S(z) - 1}{S(z) + 1} = \frac{1}{16}\frac{z - 1}{z + 1}$$

特に、$T(z), S(z)$ により実軸は実軸にうつされる。

また、$T(z)$ は円周 $C_1 = \{|z| = 2\}$ の内側を円周 $C_2 = \{|z| = 1/3\}$ の内側にうつし、$S(z)$ は円周 $C_3 = \{|z + 17/15| = 8/15\}$ の内側を円周 $C_4 = \{|z - 17/15| = 8/15\}$ の外側にうつすことがわかる。

したがって、これらの四つの円周で囲まれた領域 D は $T(z), S(z), T^{-1}(z), S^{-1}(z)$ のいずれによっても、D に隣接する領域にうつされ、D とそれぞれ C_2, C_4, C_1, C_3 を境界として共有する。これらの領域はまた、それ以外に三つの境界曲線を持ち、各々が表す元により、その境界曲線を越えてうつされる。例えば、$T(D)$ は $T(C_2), T(C_3), T(C_4)$ という境界曲線を持ち、各々 $T^2(D), T(S^{-1}(D)), T(S(D))$ が隣接している。（ $C_2 = T(C_1)$ で隣接するのは $T(T^{-1}(D)) = D$ である。）

以下繰り返せば、「文字」T, S, T^{-1}, S^{-1} の可能なすべての配列[9]が表す変換に対し D の像が対応し、その境界を貼り合わせていけば、そのようないかなる変換に対しても不変な領域

$$\Omega(G) = \bigcup_{g \in G} \overline{g(D)}$$

が得られる。（ $\overline{E}$ は集合 E の閉包を表す。）

ここで、$T(z)$ と $S(z)$ およびそれらの逆変換の有限回の合成として得られる変換全体は、合成を「積」として群になる。この群を $T(z)$ と $S(z)$ で**生成**される群と呼び、

$$G = \langle T, S \rangle$$

と記す。さらに D をタイルと考えれば、D の群 G の元による像を D のコピー、すなわち同じタイルと見なすことにより、群 G の指示に従ってタイルを貼り合わせてゆくという「タイル貼り」を行っていることになる（さらに次節で詳しく述べる)。このとき $\Omega(G)$ とは、タイルが敷き詰められた部分である。なお、その形から、タイル D およびそのコピーを**ボタンタイル**と呼ぶ（フリッケ・クラインによる類似の図 2.5 を見よ)。

さて、領域 $\Omega(G)$ の（リーマン球面での）補集合が求めるショットキィの塵集合 $\Lambda(G)$ である。ここで重要なことは、任意のボタンタイルの無限列が

---

9 このような配列を語と呼ぶ。

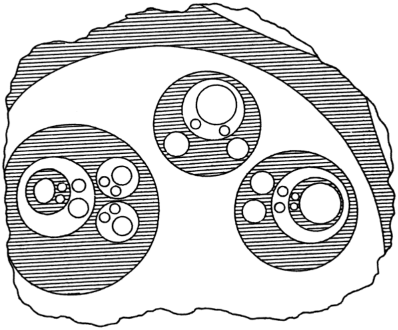


図 2.5　ボタンタイルによるタイル貼り

リーマン球面の集合として収束するとき $\Lambda(G)$ の1点からなる集合に収束する、特に $\Lambda(G)$ は G に関するボタンタイルのアトラクタであるという事実である。

補題 2.26　G の相異なる元からなる任意の列 $\{g_k\}$ に対して、ボタンタイル $g_k(D)$ の（球面距離に関する）直径は 0 に収束する。

[証明]　恒等変換は列 $\{g_k\}$ に含まれないとしてよい。また、$g_k(D)$ と $g_{k+1}(D)$ は常に隣接している、すなわち、$g_{k+1}^{-1} \circ g_k(z)$ は $\{S^{\pm 1}, T^{\pm 1}\}$ のいずれかである、としてよい。

さて、$g_k(D)$ が $g_{k+1}(D)$ と隣接する境界曲線（円周）を Γ_k、その半径を r_k とするとき、

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} \leq \eta < 1$$

を満たす η が取れることを示せば主張を得る。実際、D の境界の異なる二つの円周からなる順列は有限個しかないから、このような2円周の半径比は常に1より真に小さい。（証明終わり）

したがって、$\Lambda(G)$ の1点からなる各集合にはボタンタイルの閉包の無限列が（ハウスドルフ）収束する。特に、1点 $z_0 \in \Omega(G)$ が与えられたとき、$\Lambda(G)$ は群 G による z_0 の**軌道**

$$G(z_0) = \{g(z_0) \mid g \in G\}$$

の集積点全体である。この事実から、$\Lambda(G)$ は G の**極限集合**とも呼ばれる。また定義より G-**不変**な、すなわち

$$g(\Lambda(G)) = \Lambda(G) \qquad (g \in G)$$

を満たす、空集合でない最小の閉集合であることもわかる。

注意 ここで、区間 $[0,1]$ を「初項」とする漸化式を考え、

$$E = T(E) \cup S(E)$$

を満たす最小の閉集合を構成すれば、1章3節の自己相似集合に対応する有界閉集合を得ることもできる。

例 2.11 (滑らかな極限集合) 二つの放物型メビウス変換

$$T(z) = z + 2, \qquad S(z) = \frac{z}{2z+1}$$

で生成される群を $PSL(2,\mathbb{Z})$ の mod 2 の**主合同部分群**といい、$\Gamma(2)$ と書く。この群は $SL(2,\mathbb{Z})$ の元のうち、a と d が奇数で b と c が偶数であるようなもの全体のなす群[10]に対応する。

$T(z)$ は（無限遠点を通る円周）$C_1 = \{\mathrm{Re}\, z = -1\} \cup \{\infty\}$ を $C_2 = \{\mathrm{Re}\, z = 1\} \cup \{\infty\}$ にうつす放物型元（平行移動）で、$S(z)$ は円周

$$C_3 = \left\{ \left| z + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \right\}$$

の内側を円周

$$C_4 = \left\{ \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \right\}$$

の外側にうつす放物型元である。したがって、これら四つの円周で囲まれた集合 D はこの場合、互いに接する四つの半円弧で囲まれた、二つの領域に分かれる。したがって、タイルは「つぶれたボタンタイル」とでも呼べるもので、その貼り合わせかたは上の例と同様である。

---

10 これも $\Gamma(2)$ で表わされる。

さらにその形状から、タイルの閉包の無限列が1点からなる集合に（ハウスドルフ）収束し、$\Gamma(2)$ の極限集合は $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 全体となる。

例 2.12 (フラクタルなジョルダン閉曲線)　二つの双曲型メビウス変換

$$T(z) = \frac{-2z+1}{z-1}, \qquad S(z) = \frac{2z+1}{z+1}$$

で生成される群を G とすれば、$T(z)$ は例 2.11 の C_4 を C_1 に、$S(z)$ は C_3 を C_2 にうつす。すなわち例 2.11 と同じタイルが得られるのだが、貼り合わせかたが異なる。言いかえれば、G と $\Gamma(2)$ とによる与えられた一点の軌道は、集合としては同じだが軌道上での行動が異なるのである。

その一つの帰結として、G の極限集合はやはり $\hat{\mathbb{R}}$ であるが、今度は群の生成元の型や群の「構造」を変えずに、タイルの形、特に円周の大きさを変形できる。その結果、変形後の極限集合は、ジョルダン閉曲線ではあるが、極めて複雑な集合になることが、タイル貼りの様子から見て取れる（図 2.7 の上図も参照せよ）。

例 2.13 (アポロニウスの円充填)　二つの放物型メビウス変換

$$T(z) = z+1, \qquad S(z) = \frac{z}{2iz+1}$$

で生成される群を G とする。

$T(z)$ は円周 $C_1 = \{\mathrm{Re}\, z = -1/2\} \cup \{\infty\}$ を $C_2 = \{\mathrm{Re}\, z = 1/2\} \cup \{\infty\}$ にうつす放物型元で、$S(z)$ は円周

$$C_3 = \left\{ \left| z - \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2} \right\}$$

の内側を円周

$$C_4 = \left\{ \left| z + \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2} \right\}$$

の外側にうつす放物型元である。この場合には、タイルは四つの部分に分裂し、その貼り合わせを理解することは容易ではない。

そこで、極限集合に属する集合をいくつか考えよう。まず、$T_1(z) = S^{-1} \circ T \circ S(z)$ は、円周

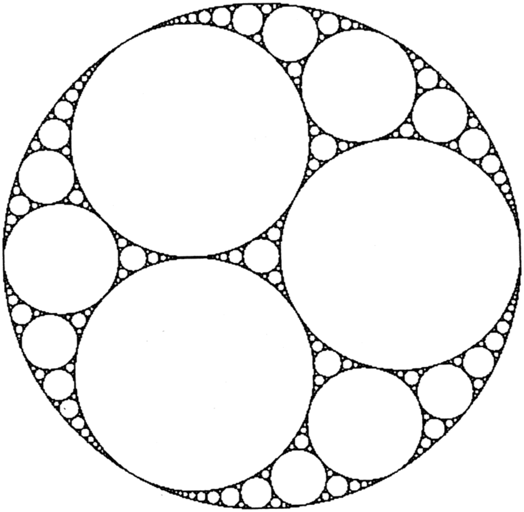


図 2.6 アポロニウスの円充填集合

$$C_3^* = \left\{ \left| z - \frac{-1+2i}{4} \right| = \frac{1}{4} \right\}$$

の内側を円周

$$C_4^* = \left\{ \left| z - \frac{1+2i}{4} \right| = \frac{1}{4} \right\}$$

の外側にうつす放物型元である。これらは、C_1 と C_2 を加えれば、例 2.11 と同じ四つの円周の配置で、$T(z)$ と $T_1(z)$ で生成される部分群 G_1 の極限集合は

$$\Lambda(G_1) = \left\{ \operatorname{Im} z = \frac{1}{2} \right\} \cup \{\infty\}$$

である。同様に、$S(z)$ と $S_1(z) = T \circ S \circ T^{-1}(z)$ で生成される部分群 G_2 の極限集合は

$$\Lambda(G_2) = \left\{ \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \right\}$$

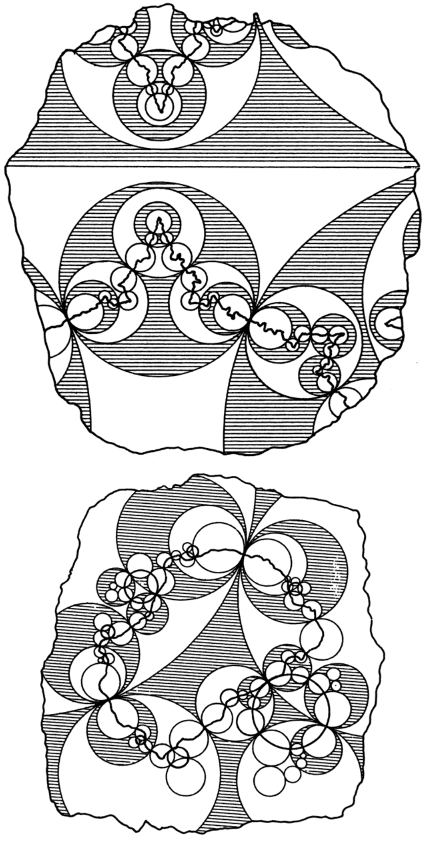


図 2.7　フリッケ・クラインの図

であることがわかる。

したがって、これらの円周 $\Lambda(G_1), \Lambda(G_2)$ に、二つの円周

$$\Lambda'(G_1) = S(\Lambda(G_1)) = \left\{ \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2} \right\} \cup \{\infty\}$$

$$\Lambda'(G_2) = T^{-1}(\Lambda(G_2)) = \left\{ \left| z + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \right\}$$

を加えた四つの円周は、互いに他の三つに接している。このような四つの円周の配置を**アポロニウスの配置**という[11]。

さて、このうちの任意の三つの円周に接する円周は2個ある。一方は元の四つの円周の中にあるが、もう一つの円周も $\Lambda(G_1)$ あるいは $\Lambda(G_2)$ をうつせば得られる。例えば、$\Lambda(G_1), \Lambda(G_2), \Lambda'(G_2)$ に接する $\Lambda'(G_1)$ 以外の円周は、$S^{-1}(\Lambda(G_1))$ である。

したがって、これら四つの円周を G の元でうつして円周を増やしてゆくことと、できた円周のうち、互いに接する三つの円周に接する円周を限りなく付け加えてゆくこととは同じ結果を生じ

$$E = \bigcup_{g \in G} g(\Lambda(G_1) \cup \Lambda(G_2) \cup \Lambda'(G_1) \cup \Lambda'(G_2))$$

とすると、この集合は定義から極限集合に含まれる。さらに G の任意の元で不変だから最小性より E の閉包は G の極限集合と一致する。これを**アポロニウスの円充填集合**と呼ぶ（図 2.6）。

注意 フリッケとクラインは、いくつかの鏡映変換による作用で不変な集合を数多く考察した。図 2.7 は極限集合の有名なスケッチである。

2.6 双曲幾何・タイル貼り *

$PSL(2, \mathbb{C})$ はメビウス変換群 $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ と同型であった。係数を実数に限ると、次の定理を得る。

定理 2.27 $PSL(2, \mathbb{R})$ は上半平面 H をそれ自身の上にうつすメビウス変換全体からなる群 $\text{Möb}(H)$ と同型である。

[証明] まず、$PSL(2, \mathbb{R})$ の元 $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ が $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ をそれ自身の上にうつすことは明らかである。さらに $\text{Im}\, z > 0$ ならば

$$\text{Im}\, T(z) = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \text{Im}\, z > 0$$

---

11 もともとのアポロニウスの円充填とは、このような四つの円周のうちの任意の三つの円周に直交する円周それぞれに関する鏡映変換による不変集合として定義された。これが $\Lambda(G)$ と一致することも以下の議論からわかる。

であるから、T は上半平面 $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ をそれ自身の上にうつすメビウス変換である。

逆に、H をそれ自身の上にうつすメビウス変換 $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ は、非調和比による表現（系 2.10 ）を考えればすべての係数は実としてよい。また、虚部を計算した上式から、$ad - bc > 0$ でなければならない。したがって、$\sqrt{ad-bc}\ (>0)$ で各係数を割れば、$PSL(2,\mathbb{R})$ の元と見なせる。

（証明終わり）

さて、上半平面 H はメビウス・ケーリー変換

$$S(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

により、単位円板 Δ の上に1対1にうつされる。実際、z が実数なら $|S(z)|$ は常に 1 に等しく、また $z \in H$ ならば $|z-i| < |z+i|$ も明らかである。そこで、Δ をそれ自身の上にうつすメビウス変換全体からなる群 $\mathrm{M\ddot{o}b}(\Delta)$ の具体的表現も与えておく。

定理 2.28　$\mathrm{M\ddot{o}b}(\Delta)$ は

$$T(z) = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \quad (|\alpha| < 1, \theta \in \mathbb{R})$$

の形の元全体からなる群である。

[証明]　まず、$\mathrm{M\ddot{o}b}(\Delta)$ の元 T により、$\alpha \in \Delta$ が 0 にうつれば、鏡像原理より $1/\bar{\alpha}$ が ∞ にうつる。したがって、

$$T_0(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$$

とおけば $T \circ T_0^{-1}(z)$ は 0 と ∞ を固定するので、回転移動か伸縮である。さらに $|z| = 1$ ならば $|T(z)| = |T_0(z)| = 1$ であるから、回転移動でなければならない。それを $z \mapsto e^{i\theta}z$ とすれば求める表示式を得る。（証明終わり）

命題 2.29　$\mathrm{M\ddot{o}b}(\Delta)$ は

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

に対応する $PSL(2,\mathbb{C})$ の部分群と同型である。

[証明] 定理 2.28 の表示において $A = e^{i\theta/2}$ および $B = -e^{i\theta/2}\alpha$ とすれば、

$$T(z) = \frac{Az + B}{\bar{B}z + \bar{A}}$$

と書け、かつ $|A|^2 - |B|^2 = 1 - |\alpha|^2 > 0$ である。したがって、$\sqrt{|A|^2 - |B|^2}$ (> 0) で各係数を割れば、主張を得る。 （証明終わり）

定理 2.30 任意の $\mathrm{M\ddot{o}b}(\Delta)$ の元 $T(z)$ は Δ 上正則で

$$\frac{|T'(z)|}{1 - |T(z)|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2} \quad (z \in \Delta)$$

が成り立つ。

[証明] まず任意の $\mathrm{M\ddot{o}b}(\Delta)$ の元

$$T(z) = e^{i\theta}\frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \quad (\theta \in \mathbb{R},\ |\alpha| < 1)$$

に対し

$$|T'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|T(z) - T(z_0)|}{|z - z_0|} = \frac{1 - |\alpha|^2}{|1 - \bar{\alpha}z_0|^2}$$

が成り立つ。ただし $z_0 \in \Delta$ とする。

一方、

$$1 - |T(z)|^2 = \frac{|1 - \bar{\alpha}z|^2 - |z - \alpha|^2}{|1 - \bar{\alpha}z|^2} = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |\alpha|^2)}{|1 - \bar{\alpha}z|^2}$$

だから主張を得る。 （証明終わり）

すなわち、単位円板 Δ 上の長さを双曲計量

$$\frac{2|dz|}{1 - |z|^2}$$

で測ることとすれば、定理 2.30 はそのような距離が任意の $\mathrm{M\ddot{o}b}(\Delta)$ の元 $T(z)$ で不変であることを示している。

定義 単位円板上の求長可能な曲線 $C = \{z = z(t) : 0 \le t \le 1\}$ の、**双曲弧**

長 $L_h(C)$ を、

$$L_h(C) = \int_C \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = 2 \sup_{\{t_j\}_{j=0}^n} \sum_{j=1}^n \frac{|z(t_j) - z(t_{j-1})|}{1-|z(t_j)|^2}$$

で定義する。ただし、$\{t_j\}_{j=0}^n$ は $[0,1]$ のすべての分割を動くものとする。

次に、単位円板上の2点 z と w の**双曲距離** $\lambda(z,w)$ を、z と w を結ぶ単位円板内の求長可能な曲線の双曲弧長の下限で定義する。すなわち、

$$\lambda(z,w) = \inf_C L_h(C)$$

である。ただし、C は z と w を結ぶ単位円板内の求長可能な曲線全体を動く。

定理 2.30 は、この用語を用いれば次のように言いかえられる。

命題 2.31　Möb(Δ) の任意の元は双曲距離を保つ。すなわち、Möb(Δ) の任意の元 T と任意の2点 z と w に対し、

$$\lambda(T(z), T(w)) = \lambda(z,w)$$

が成り立つ。

系 2.32　Möb(Δ) の任意の元は、双曲幾何学における合同変換（双曲距離を保つ変換）である。

すなわち、双曲距離を考えることにより、単位円板 Δ 上で、Möb(Δ) の元全体を合同変換群と思えるモデルが構成できた。このようなモデルを**双曲平面の単位円板モデル**と呼ぶ[12]。

なお上半平面 H は、メビウス・ケーリー変換

$$S(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

で単位円板の上にうつせた。さらに

$$S'(z) = \frac{2i}{(z+i)^2}, \quad 1 - |S(z)|^2 = \frac{4\,\mathrm{Im}\, z}{|z+i|^2}$$

[12] 本書では双曲幾何学の詳細には立ち入らない。詳細については例えば、谷口雅彦・奥村善英共著『双曲幾何学への招待』（培風館）や深谷賢治著『双曲幾何』（岩波書店）を参照せよ。

であるから、H 上の長さを（上半平面上の双曲計量）

$$\frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$$

で測ることにすれば[13]、単位円板モデルと同等の、すなわち上半平面 H 上で、$\text{Möb}(H) = PSL(2,\mathbb{R})$ の元全体を合同変換群と思えるモデルが構成できる。これを**双曲平面の上半平面モデル**と呼ぶ。また、双曲距離は同じ $\lambda(\ ,\ )$ で表す。

定理 2.33 単位円板 Δ 上の 2 点 z_0 と z_1 を結ぶ、Δ 内の双曲計量に関する最短曲線は、z_0 と z_1 を通り単位円周 S^1 に直交する円周上で z_0 と z_1 を結ぶ Δ 内の部分弧である。

[証明] 例えば、$\text{Möb}(\Delta)$ の元

$$T(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}$$

により共役をとって、$z_0 = 0$ としてよい。このときは 0 と z_1 を結ぶ任意の曲線 C に対し

$$L_\lambda(C) = \int_C \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \geq \int_C \frac{2d|z|}{1-|z|^2} \geq \int_I \frac{2d|z|}{1-|z|^2}$$

である。ここで I は 0 と z_1 を結ぶ線分であり、等号は $z(t)$ の偏角が一定でかつ $r(t) = |z(t)|$ が単調増加であるとき、すなわち $C = I$ のときに限ることもわかる。（証明終わり）

定義 双曲平面の単位円板モデルにおける「直線」は、単位円周 S^1 に直交する円周の Δ 内にある部分弧とする。このような「直線」を**双曲直線**と呼ぶ。単位円板モデルにおける「角度」は通常の角度とする。このような「直線」と「角度」を用いた幾何学が双曲幾何学である。

なお上半平面モデルでは、双曲直線は実軸に直交する円周（直線を含む）の H 内の部分弧である。

命題 2.34 双曲幾何学は（ロバチェフスキーとボリアイの意味で）非ユークリッド的である

[13] H 上の曲線を $S(z)$ で単位円板にうつして、双曲弧長を考えることと同じである。

[証明] 任意の双曲直線 L に対して、L 上にない任意の点を通り L と交わらない双曲直線が無数にあることからわかる。 (証明終わり)

双曲距離は具体的に計算できる（章末の演習問題 6 も見よ)。

例 2.14 単位円内の任意の 2 点 z と w の双曲距離は

$$\lambda(z,w) = \log\left(\frac{|1-\bar{z}w|+|z-w|}{|1-\bar{z}w|-|z-w|}\right)$$

で与えられる。

実際、$\mathrm{M\ddot{o}b}(\Delta)$ の元で w を原点にうつすとき、z が ζ にうつるとすると、定理 2.33 の証明より

$$\lambda(0,\zeta) = \int_0^{|\zeta|} \frac{2dx}{1-x^2} = \log\left(\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}\right)$$

であるから主張を得る。

注意 単位円板は双曲距離に関して完備である。すなわち、$|z|$ が 1 に収束するとき、$\lambda(0,z)$ は無限大に発散する。

さて、双曲平面を合同な双曲タイルで互いに重ならないように敷き詰めることを考える。すなわち、タイル貼りにおいて、タイルが同じだということを、ここでは双曲幾何学における「合同」で定義する。

定義 双曲平面の**双曲タイル**[14]とは、有限個の双曲線分、双曲半直線または双曲直線で囲まれた双曲平面の部分領域である。双曲タイルの境界を構成する各双曲線分、双曲半直線または双曲直線をその双曲タイルの**辺**と呼ぶ。また、**頂点**とは 2 辺の共通の端点のことで、双曲平面の境界上にある辺の端点も特に**無限頂点**という。頂点で隣り合う 2 辺が同じ直線上にある場合も許す（これはその頂点での内角が π であることと同値である)。

次に、$\mathrm{M\ddot{o}b}(\Delta)$ の元からなる群 G による、有限個の辺を持つ双曲タイル E の軌道 $G(E) = \{g(E) \mid g \in G\}$ を考えるとき、

[14] 本書ではタイルは開集合とするが、閉集合や一部の境界を加えた集合をタイル（基本領域）と呼ぶことも多い。

1. $G(E)$ の元の閉包の列が（ハウスドルフ）収束するならば、その極限は常に単位円周上の 1 点からなる集合で、
2. $\bigcup_{g \in G} \overline{g(E)} \supset \Delta$,
3. $G(E)$ の 2 元 $g(E)$ と $\tilde{g}(E)$ が共有点を持てば、両者は一致し、$g = \tilde{g}$ である

ならば、単位円板 Δ はタイル E による G に関する**双曲タイル貼り**ができるという。上半平面の場合も同様である。

例 2.15　2 辺で囲まれた上半平面 H 内の双曲タイル

$$P_1 = \{z \in H \mid 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$$

あるいは

$$P_2 = \{z \in H \mid 1 < |z| < R\} \quad (R > 1)$$

に対して、それぞれ放物型変換

$$g_1(z) = z + 1$$

あるいは双曲型変換

$$g_2(z) = Rz$$

で生成される群を G_1 あるいは G_2 とすれば、各 P_j による G_j に関する H のタイル貼りができる。

例 2.16　内角が $\pi/2, \pi/3, \pi/7$ の直角双曲 3 角形の内部を T とし、3 辺各々に関する鏡映変換を $\sigma_1(z), \sigma_2(z), \sigma_3(z)$ とする。T に鏡映変換を偶数回施して得られる部分を白に、奇数回で得られる部分を黒に着色すると、白黒が交互に現れて双曲平面を敷きつめる。そこで $\sigma_1(z), \sigma_2(z), \sigma_3(z)$ の偶数個の合成として書ける合同変換からなる群を G とする。この群 G は $(2,3,7)$ 型 **3 角群**と呼ばれる。T と $\sigma_1(T)$ とからなる双曲タイルを群 G の元でうつしてゆくと、双曲平面が敷き詰められる。すなわち、このような双曲タイルによる G に関するタイル貼りができる（図 2.8 ）。

なお、与えられた群に関してタイル貼りが可能であることは、特に各点の

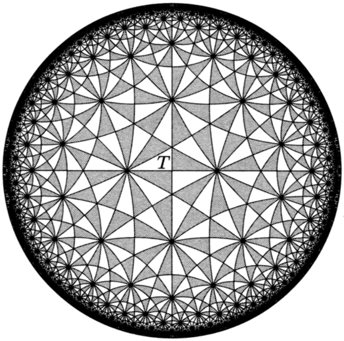


図 2.8　$(2,3,7)$ 型3角群の双曲タイル貼り

軌道の離散性を意味している。

定義　$PSL(2,\mathbb{C})$ の部分群 G が $\hat{\mathbb{C}}$ の領域 W で**真性不連続**であるとは、G の各元が W をそれ自身にうつし、かつ W の各点 z に対し、軌道 $G(z)$ が W 内の点に収束する点列を含まないこととする。

上半平面 H あるいは単位円板 Δ で真性不連続な $PSL(2,\mathbb{R})$ あるいは $\text{Möb}(\Delta)$ の部分群を**フックス群**と呼ぶ。

例 2.17 H または Δ が群 G に関してタイル貼りできれば、G はフックス群である。

特に $PSL(2,\mathbb{Z})$ やその部分群 $\Gamma(2)$ はフックス群である。

最後にいつ貼り合わせがうまくいくかどうかは、ポアンカレの定理として決定可能であるが、ここでは特殊な場合についてのみ解説しておく。

定義　任意に双曲タイル P が与えられたとき、メビウス変換 g が P の1辺を他の1辺全体にうつし、かつ $g(P)$ と P が共通点を持たないとき、g を P の**貼り合わせ変換**と呼ぶ。P の各辺を P の他の辺にうつす貼り合わせ変換全体で生成される群 G_P を P の**貼り合わせ変換群**という。

さらに P の頂点で G_P による軌道が一致するものを**同値な頂点**という。

このような用語を用いれば、タイル P で 群 G に関するタイル貼りができるとき、

条件１：P の辺は偶数個で、貼り合わせ変換でうつりあう２辺ごとに対を作る。さらに各対に対応する貼り合わせ変換により G が生成される。

条件２：P の各頂点 v に対し、同値な頂点での内角の総和は $2\pi/k$ $(k \in \mathbb{N})$ の形に書ける。

を満たすことは容易にわかる。実はこれらの条件は十分でもある。

定理 2.35 (ポアンカレの貼り合わせ定理)　双曲平面内の、（双曲距離に関して）有界で凸な双曲タイル P に対し条件１と条件２が成り立てば、双曲平面はその貼り合わせ変換群 G_P に関して P による双曲タイル貼りができる。

[証明]　まず P の頂点 v の周りをタイルで埋めてゆくと、条件１より P の両側には辺全体で貼り合う P の像があり、それらのタイルで貼られた部分の両側にもやはり辺全体で貼り合う像がある。これを繰り返せば条件２より、v の近傍は（有限個の）タイルにより、過不足なく貼り尽くせることがわかる。これを繰り返せば P の閉包の近傍がタイル貼りできることがわかる。

以下帰納的に、貼り終わった部分の境界にある頂点で同じことを繰り返せば最終的に全体のタイル貼りができる。（証明終わり）

注意　有界でなくとも、凸で双曲面積有限な双曲タイルの場合は同様であるが、無限頂点については、その点を固定点に持つ放物型元が貼り合わせ変換でなければならない。この仮定がないと全体のタイル貼りができないことがある。

2.7　演習問題

1)　立体射影 $P : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \Sigma$ の逆変換は、$z = x + iy$ および $P(z) = (\xi, \eta, \zeta)$ として

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}, \quad \left(x^2 + y^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta}\right)$$

で与えられることを示せ。

2)　立体射影により球面上の円周に対応するものは、複素平面上の円周または直線であることを示せ。さらにそれらが交わるとき、それらのなす角度も保たれるこ

と（**立体射影の等角性**）を示せ。

3)　ユニタリー群

$$SU(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

から得られる $\mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbb{C}})$ の部分群 $PSU(2)$ の元は単位球の直径を軸とする回転であり、したがって球面距離を変えない変換であることを示せ。

また、対応するメビウス変換は

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 + \overline{z_0} z} \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

の形にも書けることを示せ。

4)　原点で接する二つの閉円板に対し、その（リーマン球面での）補集合は、適当なメビウス変換により、実軸に平行な二つの直線ではさまれた領域の上に等角写像されることを示せ。

5)　円周 $|z| = 1$ と $|z - 1| = 4$ を同心円周にうつすメビウス変換を求めよ。

6)　上半平面上の 2 点 i と iy $(y > 1)$ の双曲距離は

$$\lambda(i, iy) = \int_1^y \frac{dt}{t} = \log y$$

で与えられることを示せ。

さらに、上半平面上の任意の 2 点 z と w の双曲距離は

$$\lambda(z, w) = \log \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right)$$

で与えられることを示せ。

7)　単位円板 Δ 内の 1 点 a からの双曲距離が一定値 r (> 0) の点の軌跡は，円周

$$\{z \in \Delta \mid |z - a| = \tanh(r/2) \cdot |1 - \bar{a}z|\}$$

であることを示せ（これはユークリッド的には，a と $1/\bar{a}$ との距離の比が $|a| \tanh(r/2) : 1$ である点からなるアポロニウスの円である）。

8)　上半平面上の 1 点 i との距離が

$$\{z \in H \mid \mathrm{Im}\, z = 1/2\}$$

までの距離に等しい点は，双曲線

$$\{z = x + iy \in H \mid y^2 - x^2 = 1/2\}$$

を描くことを示せ。

9)* 一般に、(考えている幾何学での) 任意の「3 角形」に対し、その任意の辺上の任意の点が他の 2 辺から高々 δ の距離しかない、という条件を満たす $\delta > 0$ が取れるとき、その平面を (グロモフの意味で)「双曲的」であるという。

ユークリッド平面は「双曲的」でないことを示せ。また、双曲平面は「双曲的」であることを示せ。

10) $PSL(2, \mathbb{Z})$ は、

$$T(z) = z + 1, \qquad S(z) = -\frac{1}{z}$$

の 2 元で生成されることを示せ。また、上半平面のタイル貼りの様子を図示せよ。

11)* 二つのメビウス変換

$$T(z) = z + 1, \qquad S(z) = \frac{1}{z}$$

で生成される群 G のタイル貼りはどのようなものであるか。さらに、そのタイル貼りと連分数展開との関係を論じよ。

12) 0 および ∞ をそれぞれ固定点に持つ、二つの放物型メビウス変換 $g_1(z)$ および $g_2(z)$ に対し、$g_1 \circ g_2^{-1}(z)$ が 1 を固定点に持つ放物型メビウス変換であれば、$g_1(z), g_2(z)$ は例 2.11 の $\Gamma(2)$ の生成元に一致することを示せ。

13)* 二つの非楕円型メビウス変換

$$T(z) = az, \qquad S(z) = bz + c \qquad (a \neq 0, 1,\ bc \neq 0)$$

で生成される群 G は**離散的**でない、すなわち、恒等変換に収束するような G の元の列が見つかることを示せ。

さらに、フックス群の可換でない二つの非楕円型元 $A(z)$ と $B(z)$ は共通の固定点を持たないことを示せ。

14)# 可換でない二つの非楕円型メビウス変換で生成されるフックス群の極限集合は、連結であるかカントール型であることを示せ。

15)* 　可換でない二つの非楕円型メビウス変換 $A(z)$ と $B(z)$ で生成される群が離散的であれば、**ヨルゲンセンの不等式**

$$|\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(A \circ B \circ A^{-1} \circ B^{-1}) - 2| \geq 1$$

が成り立つことを示せ。

第 3 章
浸潤　解析関数

ベキ級数によって表現されたものは、この関数の全域のうち、円形の一切片に過ぎない。

ワイル

ソレヲ思エバ、ナニモカモ宙ブラリンノママデ、ソシテ無ダトイウ認識ガ、ナント広ク自由ナトコロヘオレヲ突出シテクレルコトダロウ・・・

『洪水はわが魂に及び』大江健三郎

実無限の一形式としての収束ベキ級数の研究は 17 世紀の Mercator によるものを嚆矢とする。 19 世紀にはいると、収束ベキ級数は確固たる「数学的実在」として Riemann らにより認識されるに至るが、その究極的な「剛性」のゆえに、収束ベキ級数（解析関数）は本来生息している「母なる大地」（存在領域）の実在をも要求することとなる。多価性という「人の知」から、リーマン面という「自然・神の知」へのパラダイム・シフトが起こったと言える。（この Riemann の非凡な着想を、数学的に整備したのは稀有の大数学者 Klein であり、Weyl による 1913 年の名著として結実する。）

3.1　解析性

多項式の持つ様々な扱いやすい性格を十分に受け継ぐ関数を囲い込むには、それに応じた強い収束条件を課さなければならない。

定義　リーマン球面の部分集合 E で定義された複素関数の列 $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ が E 上（**各点**）**収束**するとは、任意の $z \in E$ に対し、極限 $\lim_{k\to\infty} f_k(z)$ が複素数として定まることである。さらに、この極限値を $f(z)$ とするとき、

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{z\in E}|f_k(z)-f(z)|\right)=0$$

ならば、$\{f_k(z)\}$ は $f(z)$ に E 上**一様収束**するという。

各 $f_k(z)$ が定数 z_k のときは複素数列である。このときは（各点）収束と一様収束の区別はない。またこの文脈では、複素数の完備性は例えば次の形に書き換えられる。

命題 3.1 (一様コーシー条件)　リーマン球面の部分集合 E 上の複素関数列 $\{f_k(z)\}$ が E 上で一様収束することと、**一様コーシー条件**：任意の $\epsilon>0$ に対し、正の整数 N で $k\geq N$ かつ $k'\geq N$ なら

$$\sup_{z\in E}|f_k(z)-f_{k'}(z)|<\epsilon$$

が成り立つものがあること、とは同値である。

[証明]　一様コーシー条件が成り立てば、（実数の完備性から）特に任意の点 $z\in E$ に対して

$$f(z)=\lim_{k\to\infty}f_k(z)$$

が定まるが、$k\geq N$ かつ $z\in E$ なら

$$|f_k(z)-f(z)|=\lim_{k'\to\infty}|f_k(z)-f_{k'}(z)|\leq\epsilon$$

より、$\{f_k(z)\}$ は E 上で $f(z)$ に一様収束する。

逆は3角不等式から容易に示せる。　（証明終わり）

定義　リーマン球面上の開集合 E で定義された複素関数の列 $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ が E 上 $f(z)$ に**広義一様収束**するとは、E に含まれる任意の $\hat{\mathbb{C}}$ の閉集合（すなわち E のコンパクト部分集合）上で、$\{f_k(z)\}$ が $f(z)$ に一様収束することである。

広義一様収束極限を考えれば、関数列内の元の持つ様々な性質が極限の関数に遺伝することが知られている。なお本章では以下簡単のために（特にことわらない限り）**複素平面内の領域や曲線のみを考える**。まず最も基本的なものとして次の定理がある。

定理 3.2　領域 D 上の連続関数列 $\{f_k(z)\}$ が $f(z)$ に広義一様収束するなら $f(z)$ は連続である。

[証明]　D の 1 点 z_0 を任意に取り、z_0 での $f(z)$ の連続性を示そう。そのため、任意に z_0 中心の D に含まれる閉円板 B を固定する。ここで、ϵ が任意に与えられたとき、十分大きい N を取れば

$$|f_N(z) - f(z)| < \epsilon$$

が任意の $z \in B$ で成り立つ。

一方 $f_N(z)$ に対しては z_0 の近傍 $U \subset B$ を十分小さく取れば $z \in U$ なら

$$|f_N(z) - f_N(z_0)| < \epsilon$$

が成り立つ。したがって $z \in U$ なら

$$\begin{aligned} &|f(z) - f(z_0)| \\ \le &|f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < 3\epsilon \end{aligned}$$

となり主張を得る。　（証明終わり）

注意　与えられた関数の族内の元からなる任意の列から、広義一様収束する部分列を取り出せれば都合がいい。このような族を正規族といい、5 章での議論で中心的役割を担うことになる。広義一様収束列の性質についてはさらに 6 節でも論じる。

定義　表示式

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-\alpha)^k \qquad (a_k, \alpha \in \mathbb{C})$$

を**形式的ベキ級数**といい、α をその**中心**という。（関数としての値に意味があるためには、収束性が問題になるが）部分和の列

$$\left\{ s_m(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k(z-\alpha)^k \right\}_{m=0}^{\infty}$$

が収束、あるいは（広義）一様収束するとき、形式的ベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-\alpha)^k$ は**収束**、あるいは（**広義**）**一様収束**するという。また、中心以外の点でも収

束する形式的ベキ級数を**ベキ級数**という。

一方、一般に複素数級数 $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ が**絶対収束**するとは、$\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ が収束することとする。

課題　収束する複素数級数 $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ に対して、$\lim_{k\to\infty} z_k = 0$ が成り立つことを示せ。

以下簡単のためベキ級数の中心は、ことわらない限り原点であるとする。

命題 3.3　ベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ に対し、1点 z_0 で $\{|a_k z_0^k|\}$ が有界ならば、このベキ級数は、円板 $\{|z| < |z_0|\}$ 上で絶対収束かつ広義一様収束する。

[証明]　任意の k に対し $|a_k z_0^k| \leq M$ であるとすると、$r = |z| < |z_0| = R$ を満たす z に対しては

$$|a_k z^k| = |a_k z_0^k| \left|\frac{z}{z_0}\right|^k \leq M \left(\frac{r}{R}\right)^k$$

であるから、絶対収束する。

さらに $c < 1$ を固定したとき $\{|z| \leq cR\}$ 上では一様に

$$|a_k z^k| \leq M c^k$$

であるから、一様収束することもわかる。　（証明終わり）

定義　ベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ が、円板 $\{|z| < r\}$ 上の各点で収束するような $r > 0$ の上限 R を、このベキ級数の**収束半径**といい、$\{|z| < R\}$ を**収束円板**という。

注意　$R = 0$ なら、与えられた級数は形式的ベキ級数でしかない。$R = \infty$ なら複素平面全体で収束する。

課題　一般に、収束半径 R のベキ級数は $\{|z| < R\}$ 上で絶対収束かつ広義一様収束する。また、$\{|z| > R\}$ 上ではいかなる点でも収束しない。これらを示せ。

定理 3.4 (コーシー・アダマールの公式)　ベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ の収束半径を R とするとき

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

が成り立つ。

ただしここで、実数列 $\{c_k\}$ に対し

$$\limsup_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} (\sup\{c_{k'} \mid k' \geq k\})$$

である。また、定理の主張は

$$\lambda = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k z^k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}|z|$$

とすると、次の補題より示せる。

補題 3.5　複素数の級数 $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ において、

$$\lambda = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|z_k|}$$

とすると、$\sum_{n=0}^{\infty} z_k$ は $\lambda < 1$ ならば絶対収束し、$\lambda > 1$ ならば収束しない。

[証明]　まず $\lambda < 1$ とし、$\lambda < q < 1$ を満たす q を固定する。仮定より、十分大きい任意の k に対し $|z_k| < q^k$ だから、$\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ が収束する。

一方、$\lambda > 1$ ならば、無限個の k に対し、$|z_k| > 1$ でなければならず、級数は収束し得ない。　（証明終わり）

定理 3.6 (項別微分可能性定理)　ベキ級数 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ は、その収束円板内で正則である。さらに、収束円板内では何回でも複素微分可能で、n 回微分したときの値は

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k z^{k-n}$$

で与えられる。

[証明]　まず、

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

の収束半径は

$$\limsup_{k\to\infty}\ \sqrt[k]{|ka_k|} = \limsup_{k\to\infty}\ \sqrt[k]{|a_k|}$$

より、$f(z)$ の収束半径 R と等しい。

そこで、

$$S_m(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k, \qquad R_m(z) = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k z^k = f(z) \doteq S_m(z)$$

と分けると、

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1} \\
&\doteq \frac{S_m(z)-S_m(z_0)}{z-z_0} - S_m'(z_0) + \left(S_m'(z_0) - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1}\right) \\
&\quad + \frac{R_m(z)-R_m(z_0)}{z-z_0}
\end{aligned}$$

である。ここで、$|z_0| < \rho < R$ かつ $|z| < \rho$ ならば

$$\left| S_m'(z_0) - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1} \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1} \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} k |a_k| \rho^{k-1}$$

かつ

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{R_m(z)-R_m(z_0)}{z-z_0} \right| \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \left(\sum_{j=0}^{k-1} |z|^j |z_0|^{k-j-1} \right) \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} k |a_k| \rho^{k-1}
\end{aligned}$$

である。右辺の絶対収束性から、任意に $\epsilon > 0$ が与えられたとき、m を十分大きく取れば、

$$\left| S_m'(z_0) - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1} \right| < \epsilon, \qquad \left| \frac{R_m(z)-R_m(z_0)}{z-z_0} \right| < \epsilon$$

とできる。そのように m を固定すれば $S_m(z)$ は有限和だから $|z-z_0|$ が十分小さければ

$$\left|\frac{S_m(z)-S_m(z_0)}{z-z_0}-S'_m(z_0)\right|<\epsilon$$

となり、$f(z)$ が z_0 で複素微分可能であることがわかる。さらに以上の議論を繰り返せば、後半の主張を得る。（証明終わり）

系 3.7　$f(z)$ が点 α 中心のベキ級数に展開できる（すなわち、収束円板内でそのベキ級数の値と一致する）とき、その展開係数は一意的に決まり、

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k$$

である。

定義　領域 D 上の複素関数 $f(z)$ が D 上で**解析的**であるとは、$f(z)$ が各点 $\alpha\in D$ 中心のベキ級数に展開できることである。その際の $\alpha\in D$ 中心のベキ級数を、$f(z)$ の α での**テーラー展開**という。

なおテーラー展開の一意性（上の系）から、次の公式も得られる。これは、一般のコーシーの積分公式の特別な場合であるが、直接示すほうが易しい。

系 3.8　点 α 中心のベキ級数 $f(z)$ と、その収束円内にある半径 $r>0$ の同心円周

$$C=\{\alpha+r(\cos\theta+i\sin\theta)\mid 0\leq\theta\leq 2\pi\}$$

に対し、

$$f^{(k)}(\alpha)=\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{k+1}}dz$$

が、任意の k に対して成り立つ。

特に**平均値原理**、すなわち

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha+r(\cos\theta+i\sin\theta))d\theta$$

が成り立つ。

[証明]　$\alpha=0$ としてよいが、このとき、C に沿う複素積分は、偏角 θ を積

分変数とすれば

$$dz = ir(\cos\theta + i\sin\theta)d\theta$$

により実数の区間 $[0, 2\pi]$ 上の積分と見なせる。したがって（実部虚部に分けて考えれば）主張は実積分の場合の、絶対収束かつ一様収束する級数の項別積分可能性定理からでもわかる。ここではテーラー展開に、複素積分に対する次の収束定理（補題 3.9 ）を適用することにすれば、

$$\begin{aligned}\int_C \frac{f(z)}{z^{k+1}}dz &= \int_C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^{j-k-1}dz = \sum_{j=0}^{\infty} \int_C \frac{f^{(j)}(0)}{j\,!} z^{j-k-1}dz \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} ir^{j-k}(\cos(j-k)\theta + i\sin(j-k)\theta)d\theta \\ &= 2\pi i \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\end{aligned}$$

となり、主張を得る。　（証明終わり）

補題 3.9 (収束定理)　求長可能な曲線 C 上連続な複素関数の列 $\{f_k(z)\}$ が C 上 $f(z)$ に一様収束するとき、

$$\lim_{k\to\infty} \int_C f_k(z)dz = \int_C f(z)dz$$

が成り立つ。

[証明]　まず一様収束性から $f(z)$ も C 上連続で、複素積分可能である。さらに命題 1.13 の 5. から

$$\left| \int_C f_k(z)dz - \int_C f(z)dz \right| \leq L(C) \cdot \max_{z\in C} |f_k(z) - f(z)|$$

であるので主張を得る。　（証明終わり）

3.2　指数関数

逆にベキ級数を指定すれば、解析関数が得られる。問題は、その関数がどのような場所で自然に定義され得るかである。

一方、知られているベキ級数は豊富にある[1]。その一つに、前記のテーラー展開においての微分係数をすべて等しく選んだベキ級数がある。

定義

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

で定義される複素関数[2]を（実数の場合と同様に）**指数関数**と呼ぶ。

課題 $\exp(z)$ の収束半径は $+\infty$ 、すなわち $\mathbb{C}$ 全体で正則な複素関数であることを示せ。

定理 3.10 (加法定理) 任意の複素数 z_1 と z_2 に対し

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

が成り立つ。

[証明] まず正項級数については、収束すれば項の順序が自由に変えられる（章末の演習問題 2 を参照せよ）。したがってベキ級数も、収束円板内の各点では絶対収束するから、項の順序が自由に変えられる。特に、

$$\begin{aligned} \exp(z_1)\exp(z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{z_1^j z_2^{k-j}}{j!(k-j)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} = \exp(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

となり、主張を得る。（証明終わり）

系 3.11

$$\exp(z)\exp(-z) = \exp(0) = 1$$

---

[1] 実関数の場合は、大学初年度の微分積分学の教程で扱われる。

[2] 通常は e^z という記法もよく用いられる。本書でも両者を併用するが、 e^z という記法は以下に述べる一般ベキと同時に用いると、混乱を生じる恐れがある。本節最後の例を見よ。

が成り立つ。特に任意の z に対し、$\exp(z) \neq 0$ である。

命題 3.12 (オイラーの公式：極形式の表示法)　任意の実数 θ に対し、

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

が成り立つ。特に極形式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ は

$$z = re^{i\theta}$$

と表すことができる。

[証明]　$z = i\theta$ を指数関数の定義式に入れて、実部と虚部に分けると、

$$\exp(i\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

となる。この実部と虚部に表れる実変数のベキ級数は $\mathbb{R}$ 上で収束し、実関数の場合のテーラー展開定理（すなわち系 3.7 の実関数への適用）から、それぞれ $\cos\theta$ と $\sin\theta$ のテーラー展開であることがわかる。したがってテーラー展開の一意性より、主張を得る。　（証明終わり）

系 3.13 (ベキ乗根)　$\alpha = re^{i\theta}$ の n 乗根（$z^n = \alpha$ の解）は

$$\sqrt[n]{r}\exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}i\right) \qquad (k = 0, \cdots, n-1)$$

である。

課題　指数関数の加法定理より、3 角関数の加法定理を導け。

系 3.14 (オイラーの等式)

$$-1 = e^{i\pi}, \qquad e^{2\pi i} = 1$$

命題 3.15　指数関数は複素平面上正則で

$$\frac{de^z}{dz} = e^z$$

を満たす。

定義 複素関数としての 3 角関数は

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

で定義する。これらの関数も（ベキ級数 $\exp(z)$ の部分和であるから）複素平面全体で収束し、正則である。

系 3.16

$$e^{iz} = \exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z),$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

系 3.17 (基本関係式) [3]

$$\cos(-z) = \cos(z), \quad \sin(-z) = -\sin(z),$$

$$\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1$$

$$\frac{d\cos(z)}{dz} = -\sin(z), \quad \frac{d\sin(z)}{dz} = \cos(z)$$

課題 複素関数としての 3 角関数は複素平面上有界ではない。これを示せ。

最後に、指数関数の逆関数としての対数関数は複素関数の場合には「1 価な」関数、すなわち通常の関数、ではない（言いかえれば関数として定まらない）。ここで習慣として、関数ではない場合でも、定義域の各点に複数の値の集合を対応させることにして、**多価関数**と呼ぶことが多い。複素数の偏角 $\arg(z)$ が代表的な多価関数である[4]。

定義 与えられた z に対し、

$$z = e^w$$

の解全体の集合を（多価関数という意味で）**対数関数**と呼び、

$$w = \log(z)$$

---

[3] 3 角関数の平方は通常の書き方ではなく、本書の流儀に合わせた。
[4] ただし、実際上は局所的に連続関数として定義される「断片」（分枝）を考える。

と書き表す。

系 3.18

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg z$$

が成り立つ[5]。

[証明]

$$e^{\operatorname{Re} w} = |e^w| = |z|, \qquad e^{i\operatorname{Im} w} = \frac{z}{|z|} = e^{i\arg z}$$

より主張を得る。　（証明終わり）

課題　系 3.18 で、局所的に連続な関数として定まる $\log(z)$ （の分枝）は正則で

$$\frac{d\log(z)}{dz} = \frac{1}{z}$$

が成り立つことを示せ。

定義　任意の $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ と $\beta \in \mathbb{C}$ に対し**一般ベキ**を

$$\alpha^\beta = \exp(\beta\log\alpha)$$

で定義する。

例 3.1 $n \in \mathbb{Z}$ のときは α^n は1価に定まり、通常のベキの定義と一致する。また、

$$\alpha^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\log\alpha\right)$$

は n 乗根全体と一致する。

一般ベキとしての e^z は、

$$e^z = \exp(z\log e) = \{\exp(z(1+2k\pi i)) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

となる。特に $k=0$ の場合の値を指数関数の値と定義しているのである。

---

[5] 実変数の対数関数（自然対数）を、区別のため ln で表すことにする。

課題　i^i を求めよ。また $\log(i^i)$ を求めよ。後者と $i\log i$ はどう違うか。

3.3　初等関数のグラフの追跡

2 次多項式 $P_0(z)=z^2$ は複素平面の**自己写像**（自分自身への写像）としては、偏角を 2 倍にし、絶対値を 2 乗にする関数で、原点からの任意の放射線はやはり適当な放射線上に 1 対 1 にうつり、原点中心の各同心円周は適当な同心円周を 2 重に覆うようにうつされる。

特に、第 1 象限は上半平面の上に、上半平面は全平面から正の実軸を除いた領域の上に等角写像される。

注意　整数 $k>2$ に対するベキ $P(z)=z^k$ についても同様で、原点を固定し、偏角を k 倍にし、絶対値を k 乗にする関数で、原点からの任意の放射線はやはり適当な放射線上に 1 対 1 にうつり、原点中心の各同心円周は適当な同心円周を k 重に覆うようにうつされる。

課題　第 1 象限から上半平面上への等角写像で、$1+i$ を i にうつすものを求めよ。

なお、関数 $P_0(z)$ 自体は単純であるが、$P_0(z)$ とメビウス変換により共役な関数の周辺には有名なものがいくつかある。

例 3.2 (ジュウコフスキ変換)

$$J(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

をジュウコフスキ変換という。リーマン球面の自己写像としてはケーリー変換

$$C(z)=\frac{1+z}{1-z}$$

による、$P_0(z)$ の共役である。すなわち

$$J(z)=C\circ P_0\circ C^{-1}(z)$$

である。

したがって特に、単位円板 Δ および Δ の閉包の補集合 $\hat{\mathbb{C}} - \overline{\Delta}$ を、全リーマン球面から線分 $[-1,1]$ を除いた領域 D の上に等角に写像する。

注意 $J^{-1}(z)$ は D から $\hat{\mathbb{C}} - \overline{\Delta}$ 上への等角写像とも考えられるので、D へ制限すれば、$J(z)$ による共役を考えることができる。特に、$2J(z)$ により $2D = \{2z \mid z \in D\}$ 上で $P_0(z)$ の共役を取れば、$P_{-2}(z) = z^2 - 2$ が得られる。すなわち

$$P_{-2} \circ (2J)(z) = z^2 + \frac{1}{z^2} = (2J) \circ P_0(z)$$

が成り立つ。

次にジュウコフスキ変換を2倍して、-2 だけ平行移動させると、

$$\tilde{J}(z) = z + \frac{1}{z} - 2$$

となるが、この関数は次のような共役を持つ。

例 3.3 (ケーベ関数)

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

を**ケーベ関数**と呼ぶ。そのテーラー展開は

$$K(z) = z + 2z + 3z^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} kz^k$$

で、収束半径は 1 である。

この関数は、$\tilde{J}(z)$ を対合 $I(z)$ により共役を取ったもの：

$$K(z) = I \circ \tilde{J} \circ I^{-1}(z)$$

だから、単位円板を複素平面から放射線 $(-\infty, -1/4]$ を除いた領域の上に等角に写像する[6]。

---

[6] 一般に単位円板を平面領域に等角に写像する関数 $f(z)$ を**単葉関数**というが、そのテーラー展開 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ において、$c_0 = 0$ かつ $c_1 = 1$ のとき $|c_k| \le k$ がすべての k に対し成り立つ（**ド・ブランジュの定理**で、この定理が証明されるまでは**ビーベルバッハの予想**と呼ばれていた）。ケーベ関数は、この定理が最良であることを示している。さらに5章3節を見よ。

さて次に、指数関数

$$\exp : x + iy \mapsto e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

は水平な直線を原点からの放射線上に（1 対 1 に)、鉛直な直線を原点中心の円周上に（変数の虚部が像の偏角になるように）うつす。この性質を用いた写像としては以下のものが有用である。

例 3.4　写像

$$\exp\left(\pi \frac{z - ai}{b - a}\right)$$

は、帯 $\{z \mid a < \mathrm{Im}\, z < b\}$ $(a < b)$ から上半平面上への等角写像である。

課題　帯 $\{z \mid 0 < \mathrm{Im}\, z < 1\}$ から単位円板上への等角写像を求めよ。

さらに、変数を iz に変えてから（つまり先に 1/4 回転させてから）指数関数とジュウコフスキ変換とを合成させれば、余弦関数が得られるから、例えば次のような写像が得られる。

例 3.5　写像

$$\cos \pi(z - 1) = -\cos \pi z$$

は、半帯 $\{z \mid 0 < \mathrm{Re}\, z < 1, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ から上半平面上への等角写像である。

3.4　回転数

対数関数の多価性は偏角の多価性であり、原点の周りの回転数の差として理解できる。

定義　任意の閉曲線 $C = \{z = z(t) : [a, b] \to \mathbb{C}\}$ [7]と、その上にない 1 点 α に対し、α に関する C の**回転数** $n(C, \alpha)$ を、$A = \arg(z(a) - \alpha)$ の値を任意に固定し、$\arg(z(t) - \alpha)$ の値を t に関して連続になるように変化させて

---

7 **閉曲線**とは $z(a) = z(b)$ を満たす曲線であった。

いったときの $B = \arg(z(b) - \alpha)$ の値と A との差を 2π で割ったものと定義する。すなわち

$$n(C, \alpha) = \frac{B - A}{2\pi}$$

である。

定理 3.19 (回転数の積分表現)　求長可能な閉曲線 C と、その上にない1点 α に対し、

$$n(C, \alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z - \alpha}$$

が成り立つ。

この定理の証明には次の近似定理が本質的である。その証明は、一様連続性（1章7節を参照せよ）を用いれば複素積分の定義から直ちに得られる。

補題 3.20 (積分の折れ線近似)　求長可能な曲線 C と、C を含む領域 D 上連続な複素関数 $f(z)$ が与えられたとき、C に沿う $f(z)$ の複素積分の値は C にいくらでも近い折れ線に沿う $f(z)$ の複素積分の値でいくらでも近似できる。すなわち、任意の $\epsilon > 0$ に対し、C と同じ始点・終点を持つ折れ線 Γ で、

$$\left|\int_C f(z)dz - \int_\Gamma f(z)dz\right| < \epsilon$$

かつ

$$\Gamma \subset N_\epsilon(C) = \bigcup_{w \in C} \{z \mid |z - w| \leq \epsilon\}$$

を満たすものがある。

[証明]　ϵ は $C = \{z = z(t) : [a, b] \to D\}$ と $\mathbb{C} - D$ の間の距離より小さい、すなわち $N_\epsilon(C) \subset D$ としてよい。このとき $E = N_\epsilon(C)$ は有界閉集合で、$f(z)$ は E 上で一様連続になる。すなわち、任意の ϵ に対し、正数 δ $(< \epsilon)$ で、E の2点 z と z' が $|z - z'| < \delta$ を満たせば常に

$$|f(z) - f(z')| < \epsilon$$

が成り立つものが取れる。

一方、複素積分の定義より $[a,b]$ の分割 $\{t_j\}_{j=0}^{n}$ の幅を十分小さくして

$$\left|\int_C f(z)dz - \sum_{j=1}^{n} f(z(t_j))(z(t_j)-z(t_{j-1}))\right| < \epsilon$$

が成り立つとしてよい。また $z=z(t)$ の一様連続性から

$$|z(t_j)-z(t_{j-1})| < \delta$$

も成り立つと仮定できる。

したがって、このような分割の像 $z(t_j)$ を順に結ぶ折れ線を Γ とすれば、

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz - \sum_{j=1}^{n} f(z(t_j))(z(t_j)-z(t_{j-1}))\right| < \epsilon\cdot L(C)$$

を得るので（最初から ϵ の代わりに $\epsilon/(1+L(C))$ を取っておけば）主張を得る。　　（証明終わり）

さて、回転数の積分表現の証明に戻って、与えられた求長可能な閉曲線 C とその上にない 1 点 α に対し、 α と C との距離より十分小さい ϵ を取り、上の補題にあるような折れ線 Γ を選ぶ。ここで、Γ が線分 I_j の和で、各 I_j の端点 $z(t_j), z(t_{j-1})$ は C 上にあり、$[t_{j-1},t_j]$ に対応する C の部分弧 C_j の長さも ϵ より小さいとしてよい。

一方、C 上の $\arg(z(t)-\alpha)$ の偏角は A から B まで連続に決められているが、その $z_{j-1}=z(t_{j-1})$ での値から、$\arg(z-\alpha)$ を各閉円板 $\{|z-z_{j-1}|\leq\epsilon\}$ 上の連続関数 $A_j(z)$ として定めることができる。このとき $A_j(z)$ は各 I_j 上でも連続で C_j 上では元の $\arg(z(t)-\alpha)$ と一致するから、回転数の定義より

$$2\pi\, n(C,\alpha) = \sum_j (A_j(z_j)-A_j(z_{j-1}))$$

である。

一方、I_j は $\{z=pt+q:[t_{j-1},t_j]\to\mathbb{C}\}$ と表せるから、

$$pt+q-\alpha = r(t)e^{i\theta(t)}$$

とするとき、実関数 $r(t),\theta(t)$ は I_j の各点で微分可能で

$$p=(r'(t)+ir(t)\theta'(t))e^{i\theta(t)}$$

である。したがって、

$$\int_{I_j}\frac{dz}{z-\alpha}=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{pdt}{pt+q-\alpha}=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\frac{r'(t)}{r(t)}+i\theta'(t)\right)dt$$

であるから

$$\int_{I_j}\frac{dz}{z-\alpha}=\ln|z_j|-\ln|z_{j-1}|+i(A_j(z_j)-A_j(z_{j-1}))$$

が成り立つ。j について足し合わせれば

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{dz}{z-\alpha}=\frac{1}{2\pi}\sum_j(A_j(z_j)-A_j(z_{j-1}))=n(C,\alpha)$$

となり一定値である。このような Γ に沿う複素積分で C に沿う複素積分の値がいくらでも近似できるから、主張を得る。（証明終わり）

例 3.6　単位円周 S^1 を偏角が増える向きに回る閉曲線と見なせば、その回転数は（定義より）1 である。したがって、上定理より、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S^1}\frac{dz}{z}\ (=n(S^1,0))\ =1$$

を得る。

もちろん、この事実は、実パラメータ θ を用いて $z=e^{i\theta}$ と表すとき、$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta$ に注意すれば

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S^1}\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta$$

と、実変数の積分として直接計算もできる。

系 3.21　求長可能な閉曲線 C の補集合の、任意の弧状連結成分 D に対し、D 上の関数 $n(C,z)$ は定数関数である。

[証明]　まず、$\alpha\in D$ が D 内の点 α_0 に収束するとき、

$$h(z,\alpha)=\frac{1}{z-\alpha}$$

は C 上一様に $h(z,\alpha_0)$ に収束する。したがって収束定理（補題 3.9 ）より、定理の右辺の積分

$$f(\alpha)=\int_C \frac{dz}{z-\alpha}$$

も $f(\alpha_0)$ に収束する。すなわち、$f(\alpha)$ は α の関数として C の D 上連続である。一方

$$n(C,\alpha)=\frac{f(\alpha)}{2\pi i}$$

は整数値であるから主張を得る。（証明終わり）

系 3.22 求長可能な閉曲線 C の補集合の、任意の弧状連結成分 D に対し、D が有界でなければ D 上 $n(C,z)=0$ である。

[証明] 定理 3.19 の右辺の積分は α が ∞ に向かうとき、収束定理から 0 に収束する。左辺は整数値であるから、主張を得る。（証明終わり）

最後に、ジョルダン閉曲線とは、$z(t_1)=z(t_2)$ なら $t_1=t_2$ または $\{t_1,t_2\}=\{a,b\}$ となる閉曲線 $z=z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ あるいはその像 $C=z([a,b])$ のことであった。さらに、複素平面内のジョルダン閉曲線 C の補集合 $\mathbb{C}-C$ が、その曲線の内側と外側という二つの領域に分かれるという事実がジョルダンの曲線定理であった（なお、内側というかわりに C で囲まれた領域とも呼んだ)。これらを認めると、次の主張が得られる[8]。

定理 3.23 求長可能なジョルダン閉曲線 C で囲まれた領域（ C の内側）の各点 z に対して $n(C,z)=\pm1$ である。さらに C が、その内側を左に見る向きに回れば、$n(C,z)=1$ である。

[証明] C の内側 D の 1 点 z を固定し、z を通る水平な直線を L とする。L は z の両側で C と交わるが、右左で最初のそういう点をそれぞれ z_+ および z_- とし、その間の L 上の線分を I とする。z 中心の D に含まれる閉円板 B を固定して、その周をその内側を左に見る向きに回る閉曲線を C' とする。さらに C' を I で切ったときの上下半分を $C^{\pm}$ で表す。一方、C' は I を三つの区間に分けるが、z_- の方から順に I_-,I_0,I_+ とする。

---

[8] 求長可能な閉曲線に対してはジョルダンの曲線定理も比較的容易に証明できる。

さて、C の z_- から z_+ までの部分を C_-、残りを C_+ とする。ここで、C_+ と I との和集合はジョルダン曲線と見なせるが、その内側が C^+ を含む、すなわち C がその内側を左に見る向きに回る、として議論を進める（C^- を含む場合にも同様に $n(C,z)=-1$ が示せる）。このとき、C_-, I_+, C^-, I_- および C_+, I_-, C^+, I_+ の和集合を $C_\pm$ の向きを保ったままジョルダン曲線と見なしたものを C_1 および C_2 とする。このとき、z はこれらのジョルダン曲線の外側にあるから

$$n(C_j, z) = 0$$

で、一方で積分表現より、

$$n(C_1, z) + n(C_2, z) = n(C, z) - n(C', z)$$

である。ここで、C' の z に関する回転数は定義より 1 であったから、証明が終わる。　（証明終わり）

注意　対数関数は、微分方程式

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{z}$$

を満たすが、その不定積分は $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ 内の積分経路に依存する。その多値性が回転数として表現される。

3.5　微積分の同等性、正則性と解析性の同等性

さて、1 章 6 節で中断していた微分と積分の同等性の証明に戻ろう。まず、次の定理は、長方形の場合のコーシーの積分定理から容易にわかる。

定理 3.24（長方形の場合のコーシーの積分公式）　領域 D 上で正則な関数 $f(z)$ と、D に含まれる任意の軸平行な閉長方形 R の、その周 C [9]に対し、点 $\alpha \in R - C$ を任意に固定するとき、次式が成り立つ：

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz.$$

[9]（閉）長方形の周 C といえば、常に C の内側を左に見る向きに回る閉曲線としていた。

[証明]　向かい合う辺の対をそれらに垂直な 2 本の直線で各々 3 等分して、α を通らない分割直線を各々 1 本残す。それらで閉長方形 R を 4 分割し、α を含むものを R_1 とする。以下この操作を繰り返し、辺の長さがそれぞれ $(2/3)^n a$ あるいは $(2/3)^n b$ 以下の閉長方形の列 $\{R_n\}$ で、

$$\alpha \in R_n \subset R_{n-1} \subset \cdots \subset R$$

を満たすものを作る。ここで、$C_0 = C$ とし、R_n の周を C_n とすると、定理 3.23 あるいは直接定義より、

$$n(C_n, \alpha) = 1$$

である。さらに各 C_n に沿う $f(z)/(z-\alpha)$ の複素積分は、R_n を 4 分割した各々の閉長方形の周に沿う複素積分の和であるから、長方形の場合のコーシーの積分定理（定理 1.16 ）より

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = \cdots = \int_{C_n} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$$

が成り立つ。

一方 R_n は $\{\alpha\}$ に（ハウスドルフ）収束するが、α での $f(z)$ の複素微分可能性より α の近傍で、特に C_n 上では

$$\frac{|f(z)-f(\alpha)|}{|z-\alpha|} < M$$

となる M が取れる。したがって命題 1.13 の 5. から

$$\left| \int_{C_n} \left(\frac{f(z)}{z-\alpha} - \frac{f(\alpha)}{z-\alpha} \right) dz \right| \leq ML(C_n)$$

となるので

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(\alpha)}{z-\alpha}dz$$
$$= n(C_n, \alpha) f(\alpha) = f(\alpha)$$

を得る。　（証明終わり）

定理 3.25 (正則性と解析性の同値性定理)　領域 D 上で正則な複素関数は、D 上で解析的である。

[証明]　D の任意の点 z_0 に対し、D に含まれる閉長方形 R で、その内部[10]に z_0 を含むものが取れる。R の周を C とすれば前定理より、

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$$

が、$U = \{|z - z_0| < d\}$ 内の α に対し成り立つ。ただし、d は z_0 から C までの距離である。

一方、U 内の点 α を固定し $w = \alpha - z_0$ とすると、$z \in C$ なら

$$\left|\frac{w}{z-z_0}\right| \le \frac{|w|}{d} < 1$$

だから

$$\frac{1}{z-\alpha} = \frac{1}{(z-z_0)-w} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k}{(z-z_0)^{k+1}}$$

と書け、この級数は C 上で一様収束する。したがって収束定理（補題 3.9 ）から U 内の α に対し

$$f(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz\right)(\alpha - z_0)^k$$

が成り立ち、右辺のベキ級数の収束半径が少なくとも d であることも同時にわかった。　（証明終わり）

課題　複素微分の定義を直接あてはめて、上証明中の

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$$

が（α に関して）U 上で正則であることを示せ。

系 3.26　原始関数があれば、その複素関数は正則である。

[証明]　ある関数の原始関数があれば定義より正則だから、上の定理より解析的で、定理 3.6 より特に元の関数も正則になる。　（証明終わり）

10　一般に集合 E の**内部**とは、E に含まれる最大の開集合のことである。

命題 3.27 (微分積分学の基本定理)　領域 D 上の複素関数 $f(z)$ に対し、D 上でその原始関数 $F(z)$ があれば、($f(z)$ は正則で) 任意の D の 2 点 α および β とそれらを結ぶ D 内の任意の求長可能な曲線 C に対し、

$$\int_C f(z)dz = F(\beta) - F(\alpha)$$

が成り立つ。

[証明]　C が線分のときは実変数の場合の微分積分学の基本定理より主張を得る。一般の場合は複素積分の折れ線近似（補題3.20）を適用すれば、右辺は一定値で、左辺はいくらでも元の積分に近い値にできるので、主張を得る。

（証明終わり）

注意　そこで、いつ原始関数があるかが問題となるが、これは次節で論ずる。

定義　求長可能な曲線 C と C 上の連続関数 $\phi(\zeta)$ に対し、

$$f(z) = \int_C \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

で定義される関数を**コーシー型の積分関数**と呼ぶ。

このような関数は $\mathbb{C} - C$ 上正則である。これは直接にも、次の結果からもわかる。証明は正則性と解析性の同値性定理の証明と同じである。

命題 3.28　求長可能な曲線 C に対するコーシー型の積分関数 $f(z)$ は $\mathbb{C} - C$ の各点 α でテーラー展開でき、その収束半径は α と C の距離より小さくない。

この節の最後に、領域上で正則であることと長方形の場合のコーシーの積分定理が成り立つこととの同値性を示しておく。

定理 3.29 (モレラの定理)　領域 D 上で連続な関数 $f(z)$ が、D に含まれる任意の軸平行な閉長方形に対し、その周に沿っての複素積分が 0 であれば、$f(z)$ は D 上正則である。

[証明]　任意に D の点 z_0 を固定し、z_0 中心の D に含まれる閉正方形 Q を固定する。Q の 1 頂点 $\alpha = a + ib$ を選ぶと、任意の $z = x + iy \in Q$ に

対し、仮定より、

$$F(z) = \int_a^x f(t+ib)dt + \int_b^y f(x+it)idt = \int_b^y f(a+it)idt + \int_a^x f(t+iy)dt$$

が成り立つ。

そこで、$f(z) = u(z) + iv(z)$, $F(z) = U(z) + iV(z)$ と記すと、最初の積分式からは

$$U_y(z) = -v(z), \quad V_y = u(z)$$

で、第二の積分式からは

$$U_x(z) = u(z), \quad V_x = v(z)$$

を得る。したがって、$F(z)$ はコーシー・リーマン方程式を満たし、かつ偏導関数も連続だから全微分可能で、定理 1.11 より正則である。

さらに、$F'(z) = f(z)$ 、すなわち、$F(z)$ は Q の内部での $f(z)$ の原始関数であることもわかったので、$f(z)$ も Q の内部で正則である。

（証明終わり）

3.6　正則関数の基本性質

上記の弱形の積分公式（定理 3.24 および前節で述べたその帰結）だけから、多くの重要な基本的性質を導くことができる。まず、テーラー展開の一意性は次の定理を意味する。

定理 3.30　領域 D 上正則な関数 $f(z)$ が、1 点 $\alpha \in D$ で、任意の非負整数 n に対し $f^{(n)}(\alpha) = 0$ を満たすなら、$f(z)$ は D 上恒等的に 0 である。

[証明]　任意の非負整数 n に対し $E_n = \{z \in D \mid f^{(n)}(z) = 0\}$ とすると、E_n は D の閉部分集合（すなわち、E_n の点列の集積点が D の点なら常に E_n に属するような集合）であるから、$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ もそうである。

一方、各点でのテーラー展開可能性とその展開係数の一意性から、E の各点は E の内点であるから、E は開集合でもある。しかも 1 点 $\alpha \in D$ を含むから空集合ではない。したがって D の連結性から $D = E$ となる。すなわち、主張を得る。　（証明終わり）

系 3.31　領域 D 上正則な関数 $f(z)$ が恒等的に 0 でなければ、任意の点 $\alpha \in D$ でのテーラー展開において、必ず 0 でない係数がある。すなわち、非負整数 n で $f^{(n)}(\alpha) \neq 0$ となるものがある。

特に、$f(\alpha) = 0$ となる点 α では、正の整数 N で、$f^{(N)}(\alpha) \neq 0$ となるものがある。

定義　領域 D 上正則な関数 $f(z)$ に対し $f(\alpha) = 0$ となる点 $\alpha \in D$ を $f(z)$ の**零点**と呼び、$f^{(N)}(\alpha) \neq 0$ となる最小の正の整数 N をその零点 α の**位数**と呼ぶ。

以上の事実は、次の基本定理を意味している。

定理 3.32 (零点の孤立性)　領域 D 上正則で恒等的に 0 でない関数 $f(z)$ が、1 点 $\alpha \in D$ で N 位の零点を持つならば、やはり領域 D 上正則かつ α では 0 でない（したがって、その近傍でも 0 ではない）関数 $g(z)$ で、D 上

$$f(z) = (z-\alpha)^N g(z)$$

を満たすものがある。

[証明]　仮定より、α での $f(z)$ のテーラー展開は

$$f(z) = \sum_{k=N}^{\infty} a_k (z-\alpha)^k \qquad (a_N \neq 0)$$

と書ける。そこで、

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+N} (z-\alpha)^k$$

とすれば、収束半径は $f(z)$ のテーラー展開のものと等しく、α の近傍では $f(z) = (z-\alpha)^N g(z)$ を満たす。そこで $D - \{\alpha\}$ 上では

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-\alpha)^N}$$

とおけば、この $g(z)$ が求めるものである。　（証明終わり）

系 3.33 (一致の定理)　領域 D 上正則な関数 $f(z)$ が、D 内に集積する D の点列の各点で値が 0 ならば、$f(z)$ は恒等的に 0 である。

[証明]　実際もし D 上の正則関数が恒等的に 0 でなければ、その零点は孤立しているので、D 内の点に集積し得ない。　（証明終わり）

系 3.34　実変数の指数関数・3 角関数の正則な複素関数への拡張は一意的で（すでに定義したもので）ある。

定義　全複素平面上正則な関数を**整関数**と呼ぶ。

命題 3.35　整関数は、原点中心で収束半径 $+\infty$ の単一のベキ級数で表現できる。

[証明]　与えられた整関数 $f(z)$ と任意に大きい r に対し、原点中心で 1 辺 $2r$ の閉正方形 Q_r に対する上記の積分公式（定理 3.24 ）を用いれば、Q_r の周を C_r として

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

が Q_r の内部の各点 z に対し成り立つ。したがって解析性の証明（定理 3.25 の証明）と同様に収束半径が r 以上の原点中心のベキ級数に展開できる。

テーラー展開の一意性からこれは $f(z)$ の原点でのテーラー展開と一致し、r が任意だから、収束半径は無限大である。　（証明終わり）

定理 3.36　整関数 $f(z)$ に対し、

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

が多項式様の増大度を持つ、すなわち、適当に $A, B > 0$ を取れば $M(r, f) \leq Ar^B$ が十分大きい任意の $r > 0$ に対して成り立つとき、$f(z)$ は高々 B 次の多項式である。

[証明]　原点でのテーラー展開を

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

とすれば、収束半径は $+\infty$ である。さらに上証明と同様に、任意に大きい原点中心で 1 辺 $2r$ の閉正方形 Q_r に上記の積分公式を用いれば、Q_r の周

を C_r として任意の n に対し

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

が成り立つ（系 3.7)。したがって

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C_r}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}|dz| \leq \frac{8}{2\pi}2^B A r^{B-n}$$

を得るから、$n > B$ なら $c_n = 0$ でなければならない。（証明終わり）

系 3.37 (リュービユの定理)　有界な整関数は定数関数に限る。

系 3.38 (代数学の基本定理)　定数でない任意の複素数係数多項式 $P(z)$ に対し、方程式 $P(z) = 0$ は複素数解を持つ。

[証明]　最高次数の項を $c_p z^p$ $(c_p \neq 0)$ とする。R を十分大きく取り、$|z| > R$ なら $|P(z)| \geq |(c_p/2)z^p|$ としてよい。

$P(z) = 0$ が零点を持たなければ、$1/P(z)$ も $\mathbb{C}$ 上正則であるから、特に連続で、$\{|z| \leq R\}$ 上で有界である。その補集合では上述よりやはり有界であるから、定数でなければならず仮定に反する。（証明終わり）

定理 3.39 (最大値原理)　領域 D 上正則な非定数関数 $f(z)$ の絶対値 $|f(z)|$ は D 内では最大値を取らない。

特に $f(z)$ が D の閉包まで連続に拡張できれば、$|f(z)|$ の最大値は D の境界上で取られる。

なお、一般の集合 E の**境界**とは、E の閉包から E の内部を除いた集合である[11]。

[証明]　今、1 点 $\alpha \in D$ で $|f(z)|$ の最大値を取ったとし、その値を M とする。一方、十分小さい $r > 0$ を取れば（例えば α 中心の D に含まれる閉正方形の境界と α との距離より小さく取ると）$f(z)$ の α 中心のテーラー

11　一般の集合 E の境界を ∂E で表すことが多いが、本書では ∂E は境界が閉曲線の和である場合に限り使用し、もっぱら曲線の向きを指定するために用いる。積分公式・その 2（系 3.48 ）を見よ。

展開の収束半径は r より大きいから、解析的な関数の平均値原理（系 3.8 ）から、

$$M = |f(\alpha)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\alpha + re^{i\theta})|d\theta \leq M$$

を得る。したがって、$f(z)$ の連続性より、z_0 の近傍では恒等的に $|f(z)| = M$ でなければならない。このとき、次の補題から $f(z)$ は α の近傍で定数関数である。したがって一致の定理より $f(z)$ は D 全体で定数である。

（証明終わり）

補題 3.40　絶対値が定数関数であるような正則関数は、それ自身が定数関数である。

[証明]　領域 D 上正則な関数 $f(z)$ が D 上で $|f(z)| = M$ を満たすとする。ここで、$M = 0$ なら $f(z)$ は恒等的に 0 だから、$M \neq 0$ とする。

$f(z) = u(z) + iv(z)$ として定数関数 $|f(z)|^2$ を偏微分すれば、

$$u(z)u_x(z) + v(z)v_x(z) = u(z)u_y(z) + v(z)v_y(z) = 0$$

を得る。これらは、コーシー・リーマン方程式から、

$$u(z)u_x(z) - v(z)u_y(z) = v(z)u_x(z) + u(z)u_y(z) = 0$$

と書き直せるから

$$u_x(z) = u_y(z) = 0$$

を得る。すなわち、$u(z)$ したがって $v(z)$ も定数関数である。（証明終わり）

注意　最大値原理は、7 節の開写像定理からもわかる（章末の演習問題 15 ）。

次に、一様収束する正則関数列の極限は連続であることはすでに示したが、さらに正則性も遺伝する。

定理 3.41 (正則性の遺伝定理)　領域 D 上で正則な関数列 $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ が複素関数 $f(z)$ に D 上広義一様収束するとき、$f(z)$ は D 上正則である。さらに任意の正の整数 n に対し、$f_k(z)$ の n 回導関数 $f_k^{(n)}(z)$ の列は $f^{(n)}(z)$ に D 上広義一様収束する。

[証明]　D 上の 1 点 α を任意に固定し、α 中心の閉正方形 Q で D に含まれるものを取る。このとき積分公式（定理 3.24 ）より、Q の周を C とするとき

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

が Q の内部の各点 z に対し成り立つ。

仮定より、$\{f_k(z)\}$ は Q 上 $f(z)$ に一様収束するから、両辺で $k \to \infty$ とすると収束定理（補題 3.9 ）より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

を得る。右辺はコーシー型の積分であるから、命題 3.28 により $f(z)$ は Q の内部で正則である。α は任意であるから、$f(z)$ は D 上正則である。

後半の主張も、同上の議論を繰り返せば得られる。　（証明終わり）

系 3.42 (ヴァイエルシュトラスの二重級数定理)　すべての正整数 m に対し、ベキ級数

$$f_m(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell,m} z^{\ell}$$

が、円板 $U = \{|z| < R\}$ 上で収束し、かつ

$$S_j(z) = \sum_{m=1}^{j} f_m(z) = \sum_{m=1}^{j}\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell,m} z^{\ell}\right)$$

が $j \to \infty$ のとき、複素関数 $f(z)$ に U 上広義一様に収束するとき、$f(z)$ は U 上正則で、そのテーラー展開を

$$f(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} z^{\ell}$$

とすると、

$$c_{\ell} = \sum_{m=1}^{\infty} c_{\ell,m}$$

である。すなわち、

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell,m} z^{\ell}\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} c_{\ell,m}\right) z^{\ell}$$

である。

[証明]　$f_k(z) = S_k(z)$ の場合に定理を適用すればよい。　（証明終わり）

最後に、最大値原理の次の精密化は重要である

命題 3.43 (シュヴァルツの補題)　円板 $U = \{|z| < R\}$ 上正則な関数 $f(z)$ が $f(0) = 0$ かつ U 上で常に $|f(z)| \leq M$ を満たすなら、U 上で

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R}\,|z|$$

が成り立つ。また

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R}$$

である。

さらに、前者で等号が原点以外の1点で成り立つ、あるいは後者で等号が成り立つならば、適当な $\theta \in \mathbb{R}$ により

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{M}{R}\,z$$

となる。

[証明]　$f(z)$ の原点でのテーラー展開を

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

とするとき、零点の孤立性（定理 3.32 ）から、U 上の正則関数 $g(z)$ で

$$f(z) = z g(z), \qquad g(0) = f'(0)$$

を満たすものが見つかる。

したがって、任意の $r < R$ に対し $C = \{|z| = r\}$ 上で $|g(z)| \leq M/r$ であるが、さらに $U' = \{|z| < r\}$ 上でもそうである。実際、もし U' の1点 z_0

で $|g(z_0)| > M/r$ とすると、$|g(z)|$ は U' の内部で最大値を取ることになり最大値原理から $g(z)$ は定数関数であるが、このとき C 上で $|g(z)| \leq M/r$ とはなり得ない。

すなわち、任意の $r < R$ に対し、$|z| < r$ ならば $|g(z)| \leq M/r$ が成り立つ。ここで z を固定し、r を R に収束させれば最初の主張を得る。

後半の等号条件はいずれも $|g(z)|$ が内点で最大値を取ることを意味するから、$g(z)$ は定数で、$e^{i\theta}M/R$ と書ける。したがって後半の主張を得る。

（証明終わり）

定理 3.44 (ピックの補題)　単位円板 Δ 上の正則関数 $f(z)$ が

$$f(\Delta) \subset \Delta$$

を満たせば、

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$$

が成り立つ。

さらに等号が、Δ 内の 1 点で成り立てば $f(z)$ はメビウス変換である。

注意　上式は、単位円板の正則な自己写像（自分自身への写像）f が、双曲距離に関して広義の縮小写像であることを意味している。

[証明]　単位円板の 1 点 α を任意に固定し

$$S(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}, \qquad T(z) = \frac{z-f(\alpha)}{1-\overline{f(\alpha)}z}$$

とする。このとき、

$$g(z) = T \circ f \circ S^{-1}(z)$$

は、シュヴァルツの補題の仮定を満たす。したがって

$$|g'(0)| \leq 1$$

すなわち

$$|T'(f(\alpha))f'(\alpha)| \leq |S'(\alpha)|$$

を得る。これは α での求める不等式である。

次に等号がある α で成り立てば、対応する $g(z)$ は $e^{i\theta}z$ という表示を持つから後半の主張も得る。（証明終わり）

定義　領域 D 上の正則関数 $f(z)$ が、$f(D)$ 上で正則な逆関数を持つとき、$f(z)$ は（写像として）**双正則**であるという[12]。また、領域 D からそれ自身の上への双正則写像を D の**双正則自己同型**と呼ぶ。

系 3.45　単位円板の双正則自己同型 $f(z)$ はメビウス変換である。特に、

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \qquad (|\alpha|<1,\, \theta\in\mathbb{R})$$

という表示を持つ（定理 2.28 を参照せよ）。

[証明]　$f(z)$ と、その逆写像 $f^{-1}(z)$ にピックの補題を適用すれば、

$$1 = |(f^{-1}\circ f)'(z)| \leq \frac{1-|f^{-1}(f(z))|^2}{1-|f(z)|^2}\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2} = 1$$

が成り立つ。よって等号が成り立つ場合であるから、主張を得る。

（証明終わり）

3.7　コーシーの基本定理

応用上は長方形の周や円周より一般な経路に沿っての積分を考えることが多い。そこで、一般の求長可能な曲線に関する積分定理・公式を数例導いておく。

定理 3.46 (コーシーの積分定理)　領域 D 上正則な関数 $f(z)$ と、D 内の求長可能な閉曲線の有限集合 $\{C_j\}_{j=1}^J$ で、任意の $\alpha\in\mathbb{C}-D$ に対し

$$\sum_{j=1}^{J} n(C_j,\alpha) = 0$$

を満たすものに対し、

[12] 等角写像は実は双正則である。これは例えば、次節の逆関数の積分表示からわかる。

$$\sum_{j=1}^{J} \int_{C_j} f(z)dz = 0$$

が成り立つ。

まず1章7節での議論と収束定理（補題 3.9 ）から、定理の証明[13]に必要な次の事実がわかる。

命題 3.47 (積分の順序交換)　二つの求長可能な曲線 $C_1 = \{z = z_1(t) : [a,b] \to \mathbb{C}\}$ と $C_2 = \{z = z_2(s) : [c,d] \to \mathbb{C}\}$ に対し、$f(z_1(t), z_2(s))$ が (t,s) の関数として閉長方形 $[a,b] \times [c,d]$ 上連続であるような任意の関数 $f(z,w)$ は、

$$\int_{C_1} \left(\int_{C_2} f(z,w)dw \right) dz = \int_{C_2} \left(\int_{C_1} f(z,w)dz \right) dw$$

を満たす。

[証明]　$f(z_1(t), z_2(s))$ は $[a,b] \times [c,d]$ 上一様連続であるから、$[a,b]$ の n 等分割 $\Delta_n = \{t_j\}_{j=0}^{n}$ に対する近似和

$$S(\Delta_n, f)(w) = \sum_{j=1}^{n} f(z_1(t_j), w)(z_1(t_j) - z_1(t_{j-1}))$$

は C_2 上の連続関数で、$\int_{C_1} f(z,w)dz$ に一様収束する。したがって収束定理（補題 3.9 ）から、

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \left(\int_{C_1} f(z,w)dz \right) dw &= \lim_{n\to+\infty} \int_{C_2} S(\Delta_n, f)(w)dw \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{C_2} f(z_1(t_j), w)dw \right) (z_1(t_j) - z_1(t_{j-1}))\end{aligned}$$

となる。同様の議論で、$\int_{C_2} f(z,w)dw$ が z の関数として C_1 上で連続であることもわかるので、右辺は複素積分の定義から

$$\int_{C_1} \left(\int_{C_2} f(z,w)dw \right) dz$$

---

[13] 長方形の場合と同様の区間縮小法を用いた証明が標準的であるが、ここでは Beardon による証明を与える。

に収束する。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

さて積分定理の証明に戻り、集合としての和 $E=\bigcup_{j=1}^J C_j$ を考えるとき、$E\subset\{|z|<R<+\infty\}$ としてよい。そこで、$D'=D\cap\{|z|<R\}$ とおいて、E と $\mathbb{C}-D'$ との距離を $\delta>0$ とする。複素平面を軸平行な１辺 $\delta/4$ の閉正方形の和に分割し、D' に含まれる閉正方形全体の和集合を Q とする。このとき、Q の境界 Γ は線分の有限和で D' に含まれ、かつ Γ は E と共通点を持たない。さらに Γ は、Q の内部を左側に見る向きに回る閉曲線の有限集合であると考えることができる。

さて、長方形に関するコーシーの積分定理と積分公式を用いれば、Q の内部の点 z に対しては

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

が示せる。実際、z が Q を構成するある閉正方形の内部の点であれば、右辺の積分を Q を構成する閉正方形の周に沿う積分の和に書きなおせば、以前の積分定理と積分公式から主張を得る。z がどれかの閉正方形の周上にあれば、z を周上に含む閉正方形の和として得られる閉長方形に積分公式を適用すればよい。

したがって、

$$\int_{C_j}f(z)dz=\int_{C_j}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)dz$$

が成り立つが、右辺の被積分関数は $C_j\times\Gamma$ 上で連続だから、上の命題により積分順序が変えられて、

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^J\int_{C_j}f(z)dz &= \int_\Gamma\sum_{j=1}^J\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_j}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}dz\right)d\zeta\\ &= \int_\Gamma\left(\sum_{j=1}^J -n(C_j,\zeta)\right)f(\zeta)d\zeta\end{aligned}$$

を得る。Γ の任意の点は、E と交わらずに D' の補集合の点と結べるから、仮定と系 3.21 より右辺は 0 となる。　　　　　　　　　　（証明終わり）

系 3.48 (積分定理・その２)　有限個の求長可能なジョルダン閉曲線で囲

まれた領域（すなわち、それらの閉曲線の和集合を境界に持つ有界な領域）D と、その閉包を含む領域 D' 上で正則な関数 $f(z)$ に対し

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

が成り立つ（ここで、∂D は D の境界で、その各閉曲線が D を左側に見る向きに回ることを意味する）。

[証明]　任意の $\alpha \in \mathbb{C} - D'$ に対し

$$n(\partial D, \alpha) = 0$$

が成り立つことを示せばよいが、$\mathbb{C} - \partial D$ の有界でない弧状連結成分 U_∞ の点についてはすでに示した。有界な弧状連結成分 U の点 α については、定理 3.23 から

$$n(\partial U, \alpha) = 1, \qquad n(\partial U_\infty, \alpha) = -1$$

である[14]。さらに、D の境界に含まれる他のジョルダン閉曲線 C については、$n(C, \alpha) = 0$ である。実際、α は C の外側にある。

したがって、

$$n(\partial D, \alpha) = n(-\partial U, \alpha) + n(-\partial U_\infty, \alpha) = -1 + 1 = 0$$

となり主張を得る。　（証明終わり）

積分公式もこの状況で述べておく[15]。

定理 3.49 (コーシーの積分公式)　有限個の求長可能なジョルダン閉曲線で囲まれた領域 D と、その閉包を含む領域 D' 上正則な関数 $f(z)$、および任意の $\alpha \in D$ に対し

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz$$

---

[14] ∂U および ∂U_∞ は、D の境界に含まれるジョルダン閉曲線のうち、それぞれ U および U_∞ の境界でもあるもので、∂D の場合と逆の向きに回る閉曲線である。

[15] 証明はやはり長方形の場合と同様の区間縮小法を用いた議論でもできるが、もう少し標準的な証明を述べておく。

が成り立つ。

[証明]　点 $\alpha \in D$ に対し、$U_\epsilon = \{|z-\alpha| < \epsilon\}$ とおくと ϵ が十分小さければその境界 ∂U_ϵ は D 内に含まれる。$D' - \{\alpha\}$ 上で $f(z)/(z-\alpha)$ は正則だから、$D_\epsilon = D - U_\epsilon$ とすると積分定理・その2から

$$\int_{\partial D_\epsilon} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = 0$$

を得る。すなわち

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \int_{\partial U_\epsilon} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$$

である。

左辺は ϵ の取りかたに依存しないが、一方で $\epsilon \to 0$ とすれば、右辺

$$i\int_0^{2\pi} f(\alpha + \epsilon e^{i\theta}) d\theta$$

は連続性から $2\pi i f(\alpha)$ に収束するので主張を得る。　　　　（証明終わり）

ここで、円周の場合に積分公式を適用したものが、最もよく知られているので、特に述べておく。

系 3.50 (円周に関する積分公式)　閉円板 B と、B を含む領域上正則な関数 $f(z)$、および任意の B 内部の点 α に対し

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$$

が成り立つ。

さらに、

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$$

である。

注意　この形の積分公式を用いて正則性と解析性の同値性定理（定理 3.25 ）の証明の議論をたどれば、領域 D 上で正則な関数 $f(z)$ の1点 $\alpha \in D$ でのテーラー展開の収束半径が、α から D の境界までの距離より小さくないことがわかる（章末の演習問題 8 ）。

また、正則性だけから平均値原理が示せる。

系 3.51 (平均値の定理)　$U = \{|z-\alpha| < R\}$ で正則な関数 $f(z)$ は

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{i\theta})d\theta$$

を満たす。ただし、$0 < r < R$ とする。

系 3.52 (コーシー評価式)　$U = \{|z-\alpha| < R\}$ 上正則な関数 $f(z)$ が U 上 $|f(z)| \le M$ を満たせば、任意の正の整数 n に対し

$$|f^{(n)}(\alpha)| \le \frac{n!\,M}{R^n}$$

である。

[証明]　任意の正数 $r < R$ に対し、$C = \{re^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le 2\pi\}$ とするとき

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz$$

であるから、

$$|f^{(n)}(\alpha)| \le \frac{n!\,M}{r^n}$$

を得る。$r \to R$ として主張を得る。　（証明終わり）

なお、積分定理は以下の用語を用いても定式化される。

定義　領域 D 内の、始点と終点を共有する 2 曲線 $C_j = \{z = z_j(t) : t \in [a,b]\}$ $(j = 1,2)$ が、D 内で**連続変形可能（ホモトピック）**であるとは、D 内で C_1 と C_2 を結ぶ**連続変形写像（ホモトピー）**、すなわち連続写像

$$F(s,t) : [a,b] \times [0,1] \to D$$

で

$$F(s,0) = C_1(s), \quad F(s,1) = C_2(s),$$

$$F(0,t) = C_1(0) = C_2(0), \quad F(1,t) = C_1(1) = C_2(1)$$

を満たすものが見つかることである。

特に D 内の閉曲線 C が D 内の**退化曲線**であるとは、C が D 内で定数値閉曲線（すなわち、像が D の1点からなる閉曲線）に連続変形可能であることとする。

命題 3.53 (積分定理・その3)　領域 D で正則な関数 $f(z)$ は、D 内の求長可能な任意の退化曲線 C に対し、

$$\int_C f(z)dz = 0$$

を満たす。

[証明]　任意に $\alpha \in \mathbb{C} - D$ を固定する。D 内の退化曲線 C は α を通らずに定数値閉曲線に連続変形可能であるから、回転数の定義から $n(C, \alpha)$ も連続的に 0 に変化する。一方、回転数は整数値関数だから $n(C, \alpha) = 0$ を得る。したがって、最初の積分定理 3.46 の仮定を満たすことがわかったので、主張を得る。（証明終わり）

定義　領域 D が**単連結**であるとは、$\hat{\mathbb{C}} - D$ が連結であることとする。

この用語を用いれば、積分公式は次の「保存性」として定式化できる。

系 3.54 (単連結領域上の積分定理)　単連結領域 D 上正則な関数 $f(z)$ と、D 内の任意の求長可能な閉曲線 C に対し、

$$\int_C f(z)dz = 0$$

が成り立つ。

[証明]　任意の $\alpha \in \mathbb{C} - D$ に対し

$$n(C, \alpha) = 0$$

を示せばよい。単連結性から、α は $\mathbb{C} - C$ の有界でない弧状連結成分に属しているので、主張を得る。（証明終わり）

なお、D が単連結であることは通常は、D 内の任意の閉曲線が D 内の退化曲線であることで定義される（章末の演習問題 14 を見よ）。

また、上の命題は次の形にも述べることができる。

定理 3.55 (単連結領域上の1価性定理)　単連結領域 D 上正則な関数は、D 上で原始関数を持つ。

[証明]　$\alpha \in D$ を固定して、任意の $z \in D$ と α を D 内で結ぶ求長可能な曲線を取り $C(z)$ とする。このとき

$$F(z) = \int_{C(z)} f(\zeta)d\zeta$$

は命題 3.54 から $C(z)$ の取りかたによらない（すなわち関数として定義できる)。

さらにモレラの定理の証明と同様にして、あるいは直接微分の定義式を計算すれば、$F(z)$ が D で正則で、$f(z)$ の原始関数であることも示せる。

（証明終わり）

系 3.56　単連結領域 D 上正則な関数 $f(z)$ が、D 上で零点を持たなければ、

$$\log f(z), \qquad \sqrt[n]{f(z)} = (f(z))^{1/n}$$

が D 上の正則関数として定義できる。

特に $\mathbb{C} - \{0\}$ 内の任意の単連結領域上で $\log z$ が正則関数として定義できる。

[証明]　仮定より

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

も D 上で正則になるから、その原始関数 $G(z)$ がある。

このとき直接計算で $f(z)\exp(-G(z))$ の導関数は恒等的に 0 であることがわかるので、この関数は定数関数である。したがって、1 点 $z_0 \in D$ で $\log f(z_0)$ の値を固定し、

$$\log f(z) = \log f(z_0) + G(z) - G(z_0)$$

と定義すればよい。

n 乗根は、$(f(z))^{1/n} = \exp(\frac{1}{n}\log f(z))$ で定義される。　（証明終わり）

注意

$$\log f(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + c$$

という表記を用いることもある。この表記は積分経路によらずに z での値が定まることを含意している。

応用として、次の正則関数の局所構造定理を証明する。

命題 3.57 (局所構造定理)　正則関数 $f(z)$ の N 位の零点 α に対し、その十分小さい近傍 U と、U の等角写像 $\phi(z)$ で、

$$\phi(\alpha) = 0, \qquad f(z) = (\phi(z))^N$$

を満たすものがある。

[証明]　零点の孤立性（定理 3.32 ）より、α の近傍で正則な関数 $g(z)$ で、

$$f(z) = (z-\alpha)^N g(z), \qquad g(\alpha) \neq 0$$

を満たすものがある。したがって α のより小さい近傍の上で $g(z)$ は零点を持たないから、$\{g(z)\}^{1/N}$ が α の近傍での正則関数として定義できる。それを $h(z)$ として、

$$\phi(z) = (z-\alpha)h(z)$$

とおけば、定義より

$$\phi(\alpha) = 0, \qquad f(z) = (\phi(z))^N$$

は明らかである。最後に $\phi'(\alpha) = h(\alpha) \neq 0$ より、α のさらに小さい近傍 U を取れば $\phi(z)$ は U の等角写像を与える。これは $\phi(z)$ が α の十分小さい近傍ではほぼ相似変換 $\phi'(\alpha)(z-\alpha)$ であることからわかる。

実際、$\phi(z)$ のテーラー展開

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z-\alpha)^k \qquad (a_1 = \phi'(\alpha) \neq 0)$$

の収束半径を r_0 (>0) とすると、$\phi'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-\alpha)^{k-1}$ の収束半径も r_0 だったから、 正数 r を十分小さく取れば $\sum_{k=2}^{\infty} k|a_k|r^{k-1}$ が収束し、

かつ値を $|a_1|/2$ 以下にできる。このとき、任意の $z_1, z_2 \in U = \{|z-\alpha| < r\}$ に対し

$$\begin{aligned} & |\phi(z_1) - \phi(z_2)| \\ \geq \quad & |z_1 - z_2| \left(|a_1| - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \left(\sum_{j=0}^{k-1} |z_1 - \alpha|^j |z_2 - \alpha|^{k-j-1} \right) \right) \\ \geq \quad & |z_1 - z_2| \left(|a_1| - \sum_{k=2}^{\infty} k |a_k| r^{k-1} \right) \geq \frac{|a_1|}{2} |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

が成り立つので、$\phi(z)$ は U 上で単射（かつ $|\phi'(z)| \geq |a_1|/2 > 0$）である。

（証明終わり）

$P(z) = z^N$ の写像としての様子はすでに調べたように原点中心の円板を同様の円板上にうつすから、次の主張は明らかであろう。

系 3.58 (開写像定理)　定数関数でない正則関数は開写像である。すなわち、定義された領域 D の任意の開部分集合は $f(z)$ でやはり開集合にうつされる。特に、像 $f(D) = \{f(z) \mid z \in D\}$ は領域である。

さらにジョルダン閉曲線 C を、C とその内側を含む領域の等角写像で複素平面内にうつすとき、C の内側は C の像の内側にうつる。

命題 3.59 (逆関数の積分表示)　求長可能なジョルダン閉曲線 C の内側を D とし、$C = \partial D$ であるとする。D の閉包を含む領域の等角写像 $w = f(z)$ に対し、$f(C)$ で囲まれた領域 D' は $f(D)$ と一致し、かつ、D' 上の $f(z)$ の逆関数 $g(w)$ は積分表示

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta.$$

を持つ。特に $g(w)$ は D' 上で正則である。

[証明]　まず $f(C)$ も求長可能なジョルダン閉曲線であり、等角性から $\partial D'$ と向きが一致するので、D' の任意の点 w に対しては

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(C)} \frac{d\omega}{\omega - w} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta$$

である。特に、$f(\zeta)-w$ は D 上に零点を持たなければならない。(そうでなければ積分定理より右辺は 0 である。) したがって $f(D)$ は D' を含むが、実は一致する。実際そうでないとすると、$f(D)$ の境界上に D' の閉包には含まれない点 w_0 があることになるが、これは $f^{-1}(w_0)$ での開写像性に反する。以上で $g(w)$ が D' から D 上への等角写像であることがわかった。

一方、$f(z)-w$ の $g(w)$ でのテーラー展開は $f'(g(w))(z-g(w))$ から始まるから、零点の孤立性の証明での議論と同様にして

$$h(z)=\frac{f(z)-w}{f'(z)(z-g(w))}$$

は $g(w)$ の近傍で、さらに D 上でも、正則な関数で $h(g(w))=1$ を満たすことがわかる。($f'(z)$ は D 上零点を持たないことに注意せよ。) さらに

$$H(z)=\frac{f'(z)(z-g(w))}{f(z)-w}$$

も $f(z)$ の単射性から D 上正則で、$H(g(w))=1$ を満たす。したがって、積分公式から

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta H(\zeta)}{\zeta-g(w)}d\zeta$$
$$=g(w)H(g(w))=g(w)$$

を得る。　　　　(証明終わり)

3.8　固定点での線型化問題 $^{\#}$

複素関数を力学系を与える装置と考えるときは、前節の局所構造定理のような標準化ではなく、適当な等角写像 ϕ による共役 $\phi\circ f\circ\phi^{-1}$ が標準化されることが必要になる。そこで、局所構造定理をそのような形に精密化しよう。

定理 3.60 (ベットヒャの定理)　2以上の整数 N とベキ級数

$$f(z) = a_N z^N + a_{N+1} z^{N+1} + \cdots + a_k z^k + \cdots$$
$$= \sum_{k=N}^{\infty} a_k z^k \qquad (a_N \neq 0)$$

に対し、原点の近傍 U と U の等角写像 $\phi(z)$ で $\phi'(0) = a_N^{1/(N-1)}$ かつ $\phi(U)$ 上で

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = z^N$$

を満たすものが見つかる。

[証明] まず、$T(z) = a_N^{1/(N-1)} z$ で共役を取り、$a_N = 1$ としてよい。このとき、局所構造定理の証明での議論と同様に、原点の十分小さい近傍 U 上の正則関数 $\psi(z)$ で、

$$f(z) = z^N \exp(\psi(z)), \qquad \psi(0) = 0$$

を満たすものがある。したがって

$$f^k(z) = z^{N^k} \exp(N^{k-1}\psi(z) + \cdots + \psi(f^{k-1}(z)))$$

であるから、その N^k-乗根

$$\phi_k(z) = z \exp\left(\frac{1}{N}\psi(z) + \cdots + \frac{1}{N^k}\psi(f^{k-1}(z))\right)$$

が U 上で定まる。

ここで、U 上 $\psi(z)$ は有界、すなわち $|\psi(z)| \leq M$ であるとしてよい。さらに U が十分小さく、$f(U) \subset U$ が成り立つとしてよいが、このとき、任意の正の整数 ℓ に対し U 上

$$\left|\frac{1}{N^\ell}\psi(f^{\ell-1}(z))\right| \leq \frac{M}{N^\ell}$$

が成り立つから、$\{\phi_k(z)\}$ は U 上一様収束する。その極限 $\phi(z)$ は U 上正則かつ $\phi'(0) = 1 \neq 0$ だから原点の適当な近傍の等角写像である。さらに定義より、

$$\phi_k(f(z)) = \frac{f(z)}{z^N}(\phi_{k+1}(z))^N \exp(-\psi(z)) = (\phi_{k+1}(z))^N$$

だから、極限を取れば求める関数方程式を得る。　　　　　　（証明終わり）

定義　このような関数 $\phi(z)$ は 1 の $N-1$ 乗根倍を除き一意的に定まるが、$f(z)$ に関する**ベットヒャ関数**と呼ばれる。また $w=\phi(z)$ を（固定点 0 での）**ベットヒャ座標**と呼ぶ。

次に、 $f'(0)\neq 0$ の場合には、局所的に相似変換で近似できた。その精密化は、次の問題として定式化できる。

定義　原点中心のベキ級数

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \qquad (a_1\neq 0)$$

が与えられたとき、関数方程式

$$\phi(f(z))=a_1\phi(z)$$

を $f(z)$ に関する**シュレーダー方程式**と呼ぶ。

$f(z)$ に関するシュレーダー方程式が、原点の近傍の等角写像 $\phi(z)$ で原点を固定するものを解として持つとき、$f(z)$ は原点で**解析的線型化可能**であるといい、$w=\phi(z)$ を（原点での）線型化座標と呼ぶ。また、$f(z)$ は相似変換 $a_1 z$ に**等角共役**であるともいう。

定義　上記のテーラー展開を持つ写像 $f(z)$ に対し、原点は固定点であるが

$$|a_1|=|f'(0)|<1, \qquad |a_1|>1$$

のとき原点をそれぞれ、**吸引的固定点**、**反発的固定点**と呼ぶ。

なお、$f'(0)=0$ の場合は（区別して）**超吸引的固定点**と呼ぶ[16]。

ベットヒャの定理は、中心が超吸引的固定点である任意のベキ級数が（解析的線型化可能ではないが）標準化できることを示している。一方、次の定理が成り立つ。

定理 3.61　中心が超吸引的ではない吸引的固定点あるいは反発的固定点で

---

[16] 吸引的固定点に含めることもある。

ある任意のベキ級数は、その中心で解析的線型化可能である。

[証明] 原点を吸引的固定点に持つベキ級数

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \cdots, \qquad (0 < |\lambda| < 1)$$

に対しては

$$\phi_k(z) = \frac{f^k(z)}{\lambda^k}$$

とおくと、

$$\phi_k(f(z)) = \lambda \phi_{k+1}(z)$$

を満たす。

さらに $0 < \eta^2 < |\lambda| < \eta < 1$ なる η を固定するとき、原点の十分小さい近傍 U を選び、U 上

$$|f(z)| < \eta |z|, \qquad |f(z) - \lambda z| \leq M|z|^2$$

を満たすとしてよい。ここで M は適当な正の定数である。そこで $r = \eta^2/|\lambda|$ とおけば $r < 1$ で、かつ

$$\begin{aligned} |\phi_{k+1}(z) - \phi_k(z)| &= |\lambda^{-k-1}(f^{k+1}(z) - \lambda f^k(z))| \\ &\leq |\lambda|^{-k-1} M |f^k(z)|^2 \leq M r^k |z|^2 / |\lambda| \end{aligned}$$

という一様コーシー条件が成り立つから $\{\phi_k(z)\}$ は

$$\phi(z) = \lim_{k \to \infty} \phi_k(z) = \phi_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_{n+1}(z) - \phi_n(z))$$

に U 上一様収束する。この $\phi(z)$ がシュレーダー方程式を満たすことは上述より明らかである。

原点を反発的固定点に持つ場合は原点の十分小さい近傍で逆関数 $f^{-1}(z)$ のテーラー展開を考えれば同様に主張を得る。 (証明終わり)

定義 上記のテイラー展開 $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ に対し、a_1 が

$$e^{2\pi i\theta} \qquad (\theta \in \mathbb{Q})$$

の形に書けるとき、**放物的固定点**あるいは**有理中立的固定点**といい、そうでないとき**無理中立的固定点**という。

$f(z)$ がもともと1次式でなければ、放物的固定点においては今度は常に解析的線型化可能ではない。実際 $a_1 = 1$ の場合、一般的には、次の標準化が最良である。

命題 3.62　原点中心のベキ級数

$$f(z) = z + az^{p+1} + \cdots \qquad (a \neq 0)$$

は、次の形のベキ級数に等角共役である。

$$g(z) = z - z^{p+1} + a_{2p+1}z^{2p+1} + \cdots .$$

[証明]　まず適当な相似変換 αz で共役を取って $a = 1$ としてよい。帰納的に等角共役を取ってゆき、$f(z)$ を

$$f_r(z) = z + z^{p+1} + b_{p+r+1}z^{p+r+1} + \cdots$$

まで簡約化できたとする。$1 \leq r < p$ のとき、

$$\psi(z) = z + \frac{b_{p+r+1}}{p-r}z^{r+1}$$

の形の写像で共役を取れば、

$$f_{r+1}(z) = \psi \circ f_r \circ \psi^{-1}(z)$$

の $z^{p+2}, \cdots, z^{p+r+1}$ の係数が0であることが計算でわかる。したがって、$f(z)$ は

$$z + z^{p+1} + O(|z|^{2p+1})$$

の形のテーラー展開を持つ関数に等角共役である。これを求める形の展開を持つ関数に変えることは合同変換による共役でできる。　　（証明終わり）

放物的固定点の近傍での力学系は極めて複雑であるが、次の定理が成り立つことが知られている。証明はやや面倒であり5章の定理を一つ用いるが、計算等の一部を省略して論法をたどりやすくした略証をここで与えておく。

定理 3.63 (花弁定理) 原点中心のベキ級数

$$f(z) = z - z^{p+1} + a_{2p+1}z^{2p+1} + \cdots .$$

は、

1. 各花弁 Π_m からそれ自身の中への写像であり、
2. $\{f^k(z)\}$ は Π_m 上 0 に一様収束し、
3. $\{\arg f^k(z)\}$ は Π_m 上 $2m\pi/p$ に広義一様収束し、
4. $f(z) : \Pi_m \to \Pi_m$ は適当な等角写像 $\phi(z)$ で平行移動に共役である。すなわち

$$\phi \circ f(z) \circ \phi^{-1}(z) = z + p$$

とできる。

ただし $m = 0, \cdots, p-1$ に対し、花弁 Π_m は十分小さい $\eta > 0$ を固定して、

$$\Pi_m = \left\{ re^{i\theta} \mid r^p < \eta(1+\cos(p\theta)), \left| \frac{2m\pi}{p} - \theta \right| < \frac{\pi}{p} \right\}$$

で定義される（図 3.1 を参照せよ)。

証明のため、十分小さい $r_0 > 0$ に対し（ r_0 は以下で何度か、より小さいものに取りかえる）

$$S = \{re^{i\theta} \mid 0 < r < r_0, |\theta| < \pi/p\},$$

$$W = \{re^{i\theta} \mid r > r_0^{-p}, |\theta| < \pi\}$$

とすると、$\sigma(z) = z^{-p}$ は S を W の上に等角にうつす。さらに

$$h(z) = \left(\frac{f(z)}{z}\right)^{-p} = \frac{1}{(1 - z^p + a_{2p+1}z^{2p} + \cdots)^p}$$

は原点の近傍で正則で、

$$1 + pz^p + Az^{2p} + O(|z|^{2p+1})$$

の形のテーラー展開を持つから、

$$g(z) = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}(z) = \left(f(z^{-1/p})\right)^{-p}$$

は W 上無限遠点の近傍で正則で

$$z + p + \frac{A}{z} + O(|z|^{-1-(1/p)}))$$

という挙動を持つ。

一方直接計算により次の事実が示せる。

課題　十分大きい K に対し

$$\Pi_* = \{re^{i\theta} \mid 2Kr^p < 1 + \cos(p\theta)\}$$

の各成分は、$\sigma(z)$ により、

$$\Pi = \{\rho e^{i\phi} \mid 2K < \rho(1+\cos\phi)\} = \{x + iy \mid y^2 > 4K(K - x)\}$$

に等角写像されることを示せ。

以上で、$f(z)$ と Π_0 に対する主張は、$g(z)$ と Π に対する主張に翻訳できることがわかった。したがって、花弁定理の 1) および 2) は次の補題からわかる[17]。

補題 3.64　十分大きい K を固定すれば、

1. Π は $g(z)$ でそれ自身の中へうつされ、
2. $\{\mathrm{Re}\, g^k(z)\}$ は Π 上一様に $+\infty$ に収束する。

[証明]　まず

$$g(z) = X + iY = z + p + \frac{A}{z} + \epsilon(z)$$

と書くと、$|\epsilon(z)||z|^{1+1/p}$ は W 上有界であった。そこで、K をこの上界や A および r_0^{-p} よりはるかに大きく取る。このとき、$g(z)$ は Π 上でほぼ平

[17] Π_0 の場合だけの証明であるが、他の花弁についても同様の議論で示せる。

行移動 $z+p$ になるから、任意の T に対し

$$g(\Pi+T)\subset\Pi+\left(T+\frac{p}{2}\right)$$

が成り立つ。ただし、任意の $s>0$ に対し

$$\Pi+s=\{x+iy \mid y^2>4K(K+s-x)\}$$

とおいた。実際、K が十分大きければ

$$\left|\frac{A}{z}+\epsilon(z)\right|\le\frac{2A}{|z|}$$

としてよいから、

$$Y^2-4K(K+T+\frac{p}{2}-X)>2Kp-(2|y|+4K)\frac{2A}{|z|}>0$$

が成り立つとしてよい。 (証明終わり)

次に花弁定理の 3) は

$$g^k(\sigma(z))\left(f^k(z)\right)^p=1$$

に注意すれば、次の補題からわかる[18]。

補題 3.65 任意の k に対し

$$|g^k(z)-kp|\le C\log k$$

が成り立つ。

[証明] 前補題の証明から、Π 上で

$$\mathrm{Re}\,g^k(z)>\mathrm{Re}\,z+\frac{kp}{2}$$

であるとしてよいから、Π の有界閉集合 E を固定するとき、各 $k\ge1$ に対し E 上一様に

$$|g^k(z)|\ge Ck$$

---

18 やはり Π_0 の場合だけの証明である。

となる $C>0$ が取れる。したがって、

$$g^{k+1}(z)=g^k(z)+p+\frac{A}{g^k(z)}+O(|g^k(z)|^{-1-(1/p)})$$

で最後の誤差項の評価は一様であるから、E 上で

$$g^k(z)=z+kp+A\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{g^j(z)}+O\left(\sum_{j=1}^{k-1}j^{-1-(1/p)}\right)$$

が成り立ち、再び $|g^j(z)|\geq Cj$ を用いれば主張を得る。　　　（証明終わり）

最後に花弁定理 4) については

$$g^k(z)=kp+\frac{A}{p}\log k+\psi_k(z)$$

とおくとき、

$$(k+1)p+\frac{A}{p}\log(k+1)+\psi_{k+1}(z)=kp+\frac{A}{p}\log k+\psi_k(g(z))$$

である。一方、次の補題により $\{\psi_k(z)\}$ は Π 上で広義一様に等角写像 $\psi(z)$ に収束するが、上式から

$$\psi(z)+p=\psi(g(z))$$

が成り立ち主張を得る。

補題 3.66　$\{\psi_k(z)\}$ は Π 上で広義一様に等角写像 $\psi(z)$ に収束する。

[証明]　まず、各 $\psi_k(z)$ が Π の等角写像であることは、$g^k(z)$ が (K を十分大きく取れば) Π の等角写像であることからわかる。

一方定義より

$$\begin{aligned}\psi_{k+1}(z)-\psi_k(z) &= \left(\frac{A}{(g^k(z))}-\frac{A}{kp}\right)\\ &\quad +\epsilon(g^k(z))+\frac{A}{p}\left(k^{-1}-\log(1+k^{-1})\right)\end{aligned}$$

であるが、右辺の最初の項の $k=1$ から n までの和は、有界閉集合 E を固

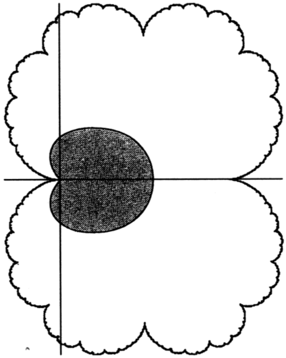


図 3.1 放物的固定点と花弁

定すれば、前補題から E 上一様に

$$O\left(\sum_{k=1}^{n} k^{-2}\log k\right)$$

である。第 2 項の同様の和は前補題中に一様収束性を見た。最後の項の同様の和は明らかに収束するから

$$\psi(z) = \lim_{k\to\infty}\psi_k(z) = \psi_1(z) + \sum_{k=1}^{\infty}(\psi_{k+1}(z) - \psi_k(z))$$

は E 上一様収束する。特にフルヴィッツの定理（5 章 3 節）より $\psi(z)$ は単射であることがわかる。（証明終わり）

定義 定理 3.63 の $w = \phi(z)$ を Π_k に関する**ファトウ座標**と呼ぶ。

最後に無理中立的固定点の場合については、まだ完全には解明されていない。初等的な証明の知られている次の場合の証明を概説しておく。

定義 実数 θ が**ディオファントス数**であるとは正数 a と $b\ (\geq 2)$ を適当に選べば、任意の整数 p と正の整数 q に対し

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{a}{q^b}$$

が成り立つことである。

課題　この条件は、$\lambda = e^{2\pi i\theta}$ とおけば

$$|\lambda^n - 1| \geq cn^{1-b}$$

が任意の正の整数 n に対して成り立つような正数 c があることと同値であることを示せ。

課題　ほとんどすべての実数はディオファントス数であること[19] を示せ。

定理 3.67 (ジーゲル)　ディオファントス数に対応する λ を1次の係数に持つ任意のベキ級数 $\lambda z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ は常に解析的線型化可能である。

[証明]　まず、$f(z)$ のテーラー展開を

$$\lambda z + a_2 z^2 + \cdots = \lambda z + F(z)$$

と書き、任意の正整数 n に対して

$$|\lambda^n - 1| \geq cn^{1-b}$$

であるとする。このとき求めるシュレーダー方程式の解の逆関数を

$$\phi(z) = z + \Phi(z)$$

と書くとき、

$$f \circ \phi(z) = \phi(\lambda z)$$

より $\Phi(z)$ は方程式

$$\Phi(\lambda z) - \lambda\Phi(z) = F(\phi(z))$$

を満たす。

一方、より易しい方程式

$$\Phi_1(\lambda z) - \lambda\Phi_1(z) = F(z)$$

19 すなわち、ディオファントス数でない実数の集合が（ルベーグ測度で測った）長さ 0 であること

は

$$\Phi_1(z) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j}{\lambda^j - \lambda} z^j$$

と未定係数法で解ける。λ の仮定より、この $\Phi_1(z)$ が実際原点中心のベキ級数であり、$f(z)$ と同じ収束半径を持つことがわかる。

そこで、$\phi_1(z) = z + \Phi_1(z)$ と書き、

$$f_1(z) = \phi_1^{-1} \circ f \circ \phi_1(z) = \lambda z + F_1(z)$$

とする。

さて十分小さい正数 η $(< 1/5)$ を固定する。次に正数 δ を

$$\delta < \min\{\eta^{b+2}/c_0, \eta\}$$

を満たすように固定する。ただし c_0 は $\sum_{j=2}^{\infty} c^{-1} j^{b-1}(1-\eta)^{j-1} < c_0 \eta^{-b-1}$ を満たす正数で、その存在は一般の二項展開式からわかる。ここで、r を十分小さく固定すれば、$D = \{|z| < r\}$ 上 $|F'(z)| \leq \delta$ とできるから、コーシーの評価式より D 上で

$$|a_j| \leq \frac{\delta}{j r^{j-1}}$$

を得る。したがって仮定より $D' = \{|z| < (1-\eta)r\}$ 上で、

$$|\Phi_1'(z)| \leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j|a_j|}{|\lambda^j - 1|} ((1-\eta)r)^{j-1}$$
$$\leq \sum_{j=2}^{\infty} c^{-1} j^{b-1} \delta (1-\eta)^{j-1} < c_0 \delta \eta^{-b-1} < \eta$$

が成り立つ。また局所構造定理の証明と同じ議論で $f(z)$ も $\phi_1(z)$ も D の等角写像であるとしてよいが、逆関数の積分表示の証明と同様にして、$f_1(z)$ が $D'' = \{|z| < (1-4\eta)r\}$ を、D' の中に等角写像することが示せる。

さて、$f_1(z)$ の評価を与えよう。まず、

$$F_1(z) + \Phi_1(\lambda z + F_1(z)) = \lambda \Phi_1(z) + F(z + \Phi_1(z))$$

より、

$$F_1(z) = \Phi_1(\lambda z) - \Phi_1(\lambda z + F_1(z)) + F(z + \Phi_1(z)) - F(z)$$

である。そこで $C = \max_{z\in D''} |F_1(z)|$ とおくと、

$$\begin{aligned} C &\le C \sup_{z\in D'} |\Phi_1'(z)| + \sup_{z\in D'} |F(z+\Phi_1(z)) - F(z)| \\ &\le \eta C + \delta \sup_{z\in D'} |\Phi_1(z)| \end{aligned}$$

が得られる。ここで $|\Phi_1(z)| = O(|z|^2)$ であるから、$\Phi_1'(z)$ にシュヴァルツの補題を適用して、さらに積分すれば、D' 上で

$$|\Phi_1(z)| < \frac{c_0\delta}{2\eta^{b+1}}(1-\eta)r$$

が成り立つことがわかる。したがって、

$$C < \frac{c_0\delta^2 r}{2\eta^{b+1}}$$

となるから、円板 $D''' = \{|z| < (1-5\eta)r\}$ 上の各点中心の半径 $r\eta$ の円板に対して、コーシーの積分公式を用いれば

$$|F_1'(z)| \le \frac{c_0\delta^2}{2\eta^{b+2}}$$

なる D''' 上の一様評価を得る。

そこで、このような η, δ を η_0, δ_0 と書きなおす。さらに $a^{b+2} = 1/2$ となる正数 a を用いて順に

$$\eta_k = a^k\eta_0, \quad r_{k+1} = r_k(1-5\eta_k), \quad \delta_{k+1} = \frac{c_0\delta_k^2}{2\eta_k^{b+2}}$$

と定義すると、$c_0\delta_k < \eta_k^{b+2}$ が成り立つこと、および無限積（章末の演習問題 3 を見よ）$R = r\prod(1-5\eta_k)$ が収束し正の値であることは容易に確かめられる。以下 $f_{k-1}(z) = \lambda z$ にならない限り、$f_{k-1}(z)$ から $\phi_k(z)$ を同様に作り、次に

$$f_k(z) = \phi_k^{-1} \circ f_{k-1} \circ \phi_k(z)$$

と置いて帰納的に定義してゆく。

$$\psi_k(z) = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k(z)$$

かつ、

$$f_k(z) = \psi_k^{-1} \circ f \circ \psi_k(z) = \lambda z + F_k(z)$$

とおけば、原点の近傍 $U = \{|z| < R\}$ 上で一様に $|F_k'(z)| \leq \delta_k$ であることから、$\{f_k(z)\}$ は U 上 λz に一様に収束する。$\{\psi_k(z)\}$ も U の等角写像 $\psi(z)$ に収束し、$\psi^{-1} \circ f \circ \psi(z) = \lambda z$ を満たすことがわかる。（証明終わり）

なお、より弱い条件として次のものが重要である。

定義　実数 θ が**ブリュノ数**であるとは、その連分数展開における近似分数列の分母 $\{q_n\}$ が

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < +\infty$$

を満たすことをいう。

定理 3.68 (ブリュノ)　ブリュノ数に対応する λ に対しては、任意のベキ級数 $\lambda z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ は常に解析的線型化可能である。

定理 3.69 (ヨコツ)　ブリュノ数に対応しない λ に対しては、ベキ級数 $\lambda z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ で解析的線型化可能でないものが見つかる。

課題　(**解析的線型化可能性予想**)　2次以上の有理関数 $R(z)$ が原点を中立的固定点に持ち、そこでのテーラー展開が、ブリュノ数に対応しない λ を1次の項の係数に持つとき、R は原点で解析的線型化可能でない[20]。

---

[20] 2次多項式の場合にはヨコツが、さらにより高次のある種の多項式の固定点および2次多項式の周期点の場合にも奥山裕介が、肯定的に解決している。

3.9　演習問題

1)　ベキ級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ の収束半径を R とするとき

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

が定まれば

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

であること（**ダランベールの公式**）を証明せよ。

2)　正項級数が収束すれば、項の順序を任意に変えてもやはり収束し、その値は変わらないことを示せ。

3)　複素数列あるいは関数列 $\{c_k\}$ に対し、$\{1+c_k\}$ の有限個の積

$$P_m=(1+c_1)\cdots(1+c_m)$$

が 0 でない有限値に収束するとき、**無限積**

$$P=\prod_{k=1}^{\infty}(1+c_k)$$

はその極限値に収束するという。c_k が関数の場合の**一様収束**などの定義も同様である。

また $|c_k|$ に対する無限積が収束するとき、もとの無限積 P は**絶対収束**するという。さて、複素数列 $\{c_k\}$ に対する無限積

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+c_k)$$

は、級数 $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|$ が収束するとき、かつそのときに限り絶対収束することを示せ。

4)

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$$

を示せ。

さらに（1章3節での議論を参考にして）**オズグッド曲線**（すなわち面積が正のジョルダン曲線）および面積が正のカントール型集合を作れ。

5)　$\log(1+z)$ の原点におけるテーラー展開は、$\log 1 = 0$ として

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} z^{k+1}$$

であることを示せ。また、収束半径を求めよ。

6)　任意の実数 α に対し $(1+z)^\alpha$ の原点におけるテーラー展開は

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

であることを示せ。ここで、

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k \neq 0), \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

を**一般化された二項係数**と呼ぶ。また、収束半径を求めよ。

7)　z を固定するとき、集合として

$$\log(z^n), \qquad n\log(z)$$

が一致するときの n を決定せよ。

8)　領域 D 上の正則関数 $f(z)$ に対し、D の点 α でのテーラー展開の収束半径は α から D の補集合までの距離より小さくないことを示せ。

9)　$U = \{|z| < R\}$ 上で正則な関数 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ が U 上 $|f(z)| \leq M$ であれば

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 R^{2k} \leq M^2$$

が成り立つこと（**グッツマーの不等式**）を証明せよ。

10)　C を単位円周として、任意の複素数 $\zeta \notin C$ に対し

$$f(\zeta) = \int_C \frac{\overline{z}}{z-\zeta} dz$$

を求めよ。

11)* 　実軸上で C^1 級の実関数 $h(x)$ で、絶対可積分なもの、すなわち

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|dx < +\infty$$

を満たすものが与えられたとき、任意の複素数 $z \notin \mathbb{R}$ に対し

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{x-z}dx$$

とおくと、$f(z)$ は上下半平面上で正則で、それぞれ実軸まで連続に拡張できることを示せ。さらにそれらの境界での値をそれぞれ $f^+(x)$、$f^-(z)$ で表せば、

$$f^+(x) - f^-(x) = 2\pi i h(x)$$

であること（**プレメリの定理**）を示せ。

では逆に $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ 上で

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

が得られるような $h(x)$ はどのようなものと考えればよいか。

12)* 　求長可能なジョルダン閉曲線 C と複素平面上の開集合 D、および $C \times D$ 上で連続な複素関数 $\phi(\zeta, z)$ で、$\zeta \in C$ を固定すると z に関しては D 上正則なものが与えられたとする。その z に関する導関数 $\phi_z(\zeta, z)$ も $C \times D$ 上で連続であるとき、$\int_C \phi(\zeta, z)d\zeta$ は（z の関数として）D 上正則で、

$$\frac{d}{dz}\int_C \phi(\zeta, z)d\zeta = \int_C \phi_z(\zeta, z)d\zeta$$

であることを示せ。

13) 　領域 D が単連結であることと、D に含まれる任意の求長可能な閉曲線 C と任意の $\alpha \in \mathbb{C} - D$ に対し $n(C, \alpha) = 0$ が成り立つこととは同値であることを示せ。

14)* 　領域 D が単連結であることと、D 内の任意の閉曲線 C が D 内の退化曲線であることとは同値であることを示せ。

15) 　開写像定理を用いて最大値原理を示せ。

第 4 章
渾沌　2 次多項式（間奏として）

複素変数の 2 次多項式について研究を始めた、と友人に話すといつも、彼らはまじまじと眺め、「何か新しいことが見つかると思っているのかね。」と聞くのだった。

ドゥアディ

そこに曖昧なものなくして何らの断定も出来ないこと、ここにもまた悪徳がある。

『不合理ゆえに吾信ず』埴谷雄高

「カオス」の概念は Poincaré まで遡ることができるが、「カオス」の復権からはまだ四半世紀しか経過していない。その新しい文脈で、最初に 2 次式の反復合成によって「カオス」が生じることを示したのは生物学者の May である。物理学者の Feigenbaum は「カオス」へと至る行程にある種の普遍性があることを発見した。いずれも 1970 年代のことである。

その後の研究は 2 次式の反復合成のもつ普遍的な性格を次々に明らかにした。特にマンデルブロ集合の研究は、単なるケーススタディには留まらず、力学系研究における中心的な研究課題の一つとなっている[1]。

4.1　単峰写像とグラフ解析

定義　実数直線上の閉区間 I からそれ自身への写像 $f(x)$ が I 上の**単峰写像**であるとは、最大値を取る点 x が I の内部にあり、それより小さい x では $f(x)$ が真に単調増加に、それより大きい x では $f(x)$ が真に単調減少に

[1] 本章は「複素解析」のコースとしては内容が逸脱しているので、省略することができるように書かれている。逆にいくつかの事実を仮定すれば、本章は独立に読むことができる。

なる関数であることとする。

例 4.1 (対称テント写像)

$$T(x) = \begin{cases} ax & (0 \le x < 1/2) \\ a(1-x) & (1/2 \le x \le 1) \end{cases}$$

は、$0 < a \le 2$ のとき、$I = [0,1]$ 上の単峰写像である。このような写像を**対称テント写像**と呼ぶ。なお、$a = 0$ や $a > 2$ の場合も、テント写像と呼ぶことにする。

例 4.2 (競合的生存モデル写像)

$$L(x) = ax(1-x)$$

は、$0 < a \le 4$ のとき、$I = [0,1]$ 上の単峰写像である。このような写像を**競合的生存モデル写像**と呼ぶ[2]。

一般に実関数の反復合成による軌道を調べるときには、いわゆるグラフ解析を用いることができる。

定義　**グラフ解析**とは、与えられた実関数 $y = f(x)$ のグラフを用いて、$f(x)$ の反復合成による軌道を図示する方法である。その作図は以下の指示に従って行われる（図 4.1 を見よ）。

1. 初期値 x_0 から鉛直線をたどってゆき、$y = f(x)$ のグラフにぶつかった点 F_1 で止まる。（この点は $x_1 = f(x_0)$ として (x_0, x_1) である。）
2. F_1 から水平に $y = x$ のグラフがある方向に進み、ぶつかった点 G_1 で止まる。（この点は (x_1, x_1) である。）
3. G_1 から鉛直線を $y = f(x)$ のグラフの方向に進み、ぶつかった点 F_2 で止まる。（この点は $x_2 = f(x_1)$ として (x_1, x_2) である。）
4. 以下、2. と 3. の操作を繰り返す。

さて、グラフ解析を行う関数が変化するとき、軌道の行動が総体として急激に変化することがある。そのような現象を**分岐現象**という。

---

[2] 通常、ロジスティック写像と呼ばれる。

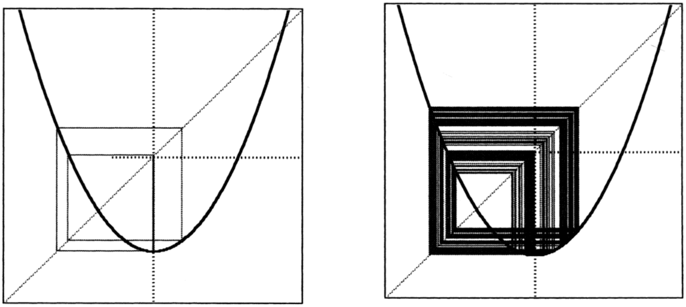


図 4.1 グラフ解析の例

ここでは一般的な定義には立ち入らず、例えば2次式

$$y = f(x) = x^2 + a$$

の場合に、典型的な例を述べよう。

例 4.3 (接線分岐) パラメータ a の値が、1/4 より大きければ、すべての実数 x_0 の軌道は無限大に発散する。パラメータ値が、1/4 に等しいかわずかに小さくなれば、一定の長さを持つ有界閉区間 I で、その内部にある任意の点の軌道が常に I の 1 点に収束するものが現れる。

一般に、何回かの反復合成の固定点を**周期点**といい、(最初に) 元の点に戻るまでの回数を (**最小**) **周期**と呼ぶ。

例 4.4 (周期倍分岐) パラメータ a の値が、1/4 以下で $-3/4$ 以上ならば、一定の長さを持つ有界閉区間 I で、その内部にある任意の点の軌道が I の 1 点に収束するものがある。パラメータ値が、$-3/4$ よりわずかに小さくなれば、周期 2 の周期点 x_1 (すなわち $f^2(x) = x$ だが固定点ではないもの) が現れ、x_1 の近くの点の軌道は収束するのではなく、x_1 の軌道 (x_1 と $f(x_1)$ からなる集合) に漸近的に近づいてゆく。

この状況はパラメータの値が $-5/4$ より大きいときはほぼ同様であるが、パラメータの値が $-5/4$ よりわずかに小さくなれば、周期 4 の周期点 x_2 が現れ、x_2 の近くの点の軌道は、4 点からなる x_2 の軌道に漸近的に近づいてゆく。

以下パラメータの値が小さくなってゆくにつれて、順次周期 2^k の周期点が分岐し、周期 2^{k+1} の周期点が現れる。

注意　なお、周期倍分岐は最終的にはほぼ一定比の間隔のパラメータ値で繰り返し発生し（ファイゲンバウム現象）、その極限のパラメータ値では、例えば 0 の軌道が、軌道が発散しない初期値の集合のいたるところに近づくような行動を示す（いわゆるカオスへの相転移が起こる）。

このような分岐を説明することはもちろん実数の世界で可能である。しかし、いくつかの問題が生じる[3]。

課題

1. 実数係数の多項式であっても、その固定点は一般には複素数である。特に、多項式については（代数学の基本定理より）固定点は常にあるが、実数直線上に無ければ、グラフ解析では認識できない。例えば、$P_{\pm 3}(z) = z^2 \pm 3$ を比較せよ。
2. 与えられた点が指定された周期の周期点となるような多項式をすべて列挙すると、一般にはその係数は複素数となる。例えば、原点を周期 3 の周期点として持つ $P_c(z) = z^2 + c$ をすべて挙げよ。
3. 固定点での微分係数が 1 であるときには、その近傍での反復合成による挙動が一定でない。

$$P(z) = z^2 + z, \qquad Q(z) = z^4 - 2z^3 + z$$

による原点の近くでの点の軌道を比較せよ。

パラメータの複素化により、少なくともこれらの問題はひとまず解消され、より統一的な議論が可能になる。

4.2　発散点と充填ジュリア集合

まず、複素数係数の2次多項式の反復合成を考えるとき、定義域と値域の

[3] 誤差が積み重なっていって正確でなくなるという問題は本書では立ち入らない。

座標を同時に同じように取りかえることは、写像の作用そのものには何の変化も生じさせない。数学的には、これは相似変換による共役でうつりあう2次多項式は同値と考えることを意味する。

定理 4.1　任意の2次多項式は、

$$P_c(z) = z^2 + c$$

という表示を持つ2次多項式と相似変換により共役である。

[証明]　与えられた2次多項式を

$$P(z) = Az^2 + Bz + C \qquad (A \neq 0)$$

とする。ここで

$$T(z) = \frac{1}{A}z + D$$

により、$z^2 + c$ が $P(z)$ と共役、すなわち

$$T(z^2 + c) = P(T(z))$$

が成り立つとすれば、

$$2D + \frac{B}{A} = 0, \qquad \frac{1}{A}c + D = AD^2 + BD + C$$

から、まず D が定まり、次に c が定まる。

逆にこのような値で定まる $T(z)$ により、主張が成り立つことは明らかである。（証明終わり）

定義　以下本章では、任意の $c \in \mathbb{C}$ に対し

$$P_c(z) = z^2 + c$$

とする。

各 $c \in \mathbb{C}$ に対し、$P_c(z)$ の反復合成による**軌道** $\{P_c^k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ が有界となる点 z 全体の集合を $P_c(z)$ の**充填ジュリア集合**と呼び、K_c で表す。さらに充填ジュリア集合 K_c の境界（K_c の閉包から K_c の内部を除いたもの）を $P_c(z)$ の**ジュリア集合**と呼び J_c で表す。

また、軌道 $\{P_c^k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ が無限遠点に収束するような点 z を $P_c(z)$ の**発散点**と呼び、$P_c(z)$ の発散点全体の集合を F_c で表す。

注意　任意の $P_c(z)$ は、写像としては同様の幾何学的特徴を持つ。すなわち、$P_0(z) = z^2$（原点のみで重複した、複素平面の2重の被覆）を行い、次に平行移動 $z \mapsto z + c$ を行うことに相当する。

例 4.5

$$J_0 = \{|z| = 1\}, \qquad K_0 = \{|z| \leq 1\}, \qquad F_0 = \{|z| > 1\}$$

[証明]　$\{P_0^k(z)\}$ は $|z| > 1$ か $|z| < 1$ かによって ∞ か 0 に収束し、$P_0(\{|z| = 1\}) = \{|z| = 1\}$ なので主張を得る。　（証明終わり）

例 4.6

$$J_{-2} = K_{-2} = [-2, 2]$$

[証明]　ジュウコフスキ変換の2倍 $2J(z)$ により、$\mathbb{C} - [-2,2]$ 上の $P_{-2}(z)$ の作用は F_0 上の $P_0(z)$ の作用と共役であった（3章3節）。

したがって、F_{-2} は $\mathbb{C} - [-2,2]$ を含む。一方 $P_{-2}([-2,2]) = [-2,2]$ より、これらは一致する。　（証明終わり）

命題 4.2　K_c は、任意の正の整数 k に対し k 回の合成 $P_c^k(z)$ の充填ジュリア集合 $K(P_c^k)$、すなわち $\{(P_c^k)^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ が有界な点 z の集合と一致する。

[証明]

$$K_c \subset K(P_c^k)$$

は明らかであるから、逆を示そう。そのために、$z \in K(P_c^k)$ を任意に取ると、定義より $\{(P_c^k)^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ を含む閉円板 B がある。このとき、

$$\{(P_c^k)^n(P_c(z))\}_{n=0}^{\infty} \subset P_c(B)$$

だから $P_c(z) \in K(P_c^k)$ を得る。以下同様に $P_c^j(z) \in K(P_c^k)$ が $j = 2, \cdots, k-1$ に対しても成り立つから、$z \in K_c$ が分かる。　（証明終わり）

さらに、より精密な次の定理が成り立つ。

定理 4.3 (発散点条件)

$$|z| > \max\{|c|, 2\}$$

ならば z は $P_c(z)$ の発散点である

[証明]

$$|P_c(z)| \geq |z|^2 - |c| > |z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1)$$

より、$|z| = 2 + \epsilon$ と置くと、$\epsilon > 0$ かつ $|P_c(z)| > (1+\epsilon)|z|$ で、特に $P_c(z)$ も定理の仮定を満たす。したがって上述の議論を繰り返せば、各 $P_c^k(z)$ が上の不等式を満たす。特に

$$|P_c^k(z)| \geq (1+\epsilon)|P_c^{k-1}(z)| \geq \cdots \geq (1+\epsilon)^k|z|$$

が成り立つから主張を得る。　(証明終わり)

系 4.4　点 z の軌道内の 1 点 $P_c^N(z)$ $(N > 0)$ が定理の仮定を満たせば、z は発散点である[4]。

さて上の定理から、$P_c(z)$ が与えられたとき、$r > 0$ を

$$r^2 - r > r > \max\{|c|, 2\}$$

を満たすように固定し、

$$W = \{|z| \geq r\}, \qquad W^\circ = \{|z| > r\}$$

とすれば、W の点はすべて $P_c(z)$ に関して発散点で、かつ

$$P_c(W) \subset W^\circ$$

が成り立つ。したがって

$$W \subset P_c^{-1}(W^\circ)$$

[4] 命題 4.2 はこの系からもわかる。

でもある。ただし、一般に集合 E の $f^k(z)$ による逆像を $f^{-k}(E)$ で表す。すなわち

$$f^{-k}(E) = \{z \in \mathbb{C} \mid f^k(z) \in E\}$$

である。

命題 4.5 (構造定理)　上述の仮定の下で、

$$\mathbb{C} - K_c = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_c^{-k}(W) = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_c^{-k}(W^\circ) = F_c$$

が成り立つ。特に、F_c は開集合で K_c の（$\mathbb{C}$ での）補集合である。

[証明]　集合 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_c^{-k}(W)$ の各点が発散点であることは、上の系から分かる。

次に、$z \in \mathbb{C} - K_c$、すなわち、軌道 $\{P_c^k(z)\}$ が有界でなければ、$P_c^N(z) \in W$ となる N があるから z は E に属する。

$K_c \cap F_c$ は空集合だから、主張を得る。（証明終わり）

系 4.6　K_c は閉集合である。

定理 4.7 (完全不変性)　K_c および J_c は $P_c(z)$ で完全不変である。すなわち、

$$P_c(K_c) = P_c^{-1}(K_c) = K_c, \qquad P_c(J_c) = P_c^{-1}(J_c) = J_c$$

が成り立つ。

[証明]　まず、$z \in K_c$ であることは $\{P_c^k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ が有界であることと同値であるが、これは $\{P_c^{k-1}(P_c(z))\}_{k=1}^{\infty}$ が有界であること、すなわち $P_c(z) \in K_c$ と同値である。さらに $z \in K_c$ であることは、任意の $w \in P_c^{-1}(z)$ に対して $\{P_c^k(w)\}_{k=1}^{\infty}$ が有界であることとも同値だから、

$$K_c = P_c(K_c) = P_c^{-1}(K_c)$$

が成り立つ。一方、構造定理からは、

$$F_c = P_c(F_c) = P_c^{-1}(F_c)$$

が成り立つ。すなわち、F_c も完全不変である。

特に、

$$P_c(J_c) \subset J_c$$

である。実際、$z \in J_c$ に対し $w = P_c(z)$ とする。定義と構造定理より z に収束する K_c と F_c の点列があるが、$P_c(z)$ の連続性よりこれらの像の列は w に収束し、K_c と F_c の完全不変性から、$w \in J_c$ を得る。

したがって、$P_c^{-1}(J_c) \supset J_c$ だが、$P_c^{-1}(J_c) - J_c$ が空でないと仮定する。その 1 点 z をとると、$z \in K_c$ だから、z は K_c の内点である。したがって写像 $P_c(z)$ の局所構造から容易に[5] $P_c(z)$ も K_c の内点でなければならないことがわかり仮定に反する。したがって $P_c^{-1}(J_c) = J_c$ であり、特に $P_c(J_c) = J_c$ も成り立ち、J_c の完全不変性が得られた。（証明終わり）

さて、構造定理をもう少し幾何学的に言いかえる。そのため与えられた $P_c(z)$ に対し、前述の W を固定し、

$$R_0 = P_c^{-1}(W^\circ) - W$$

とおく。このとき、R_0 は二つのジョルダン閉曲線で囲まれた領域で、構造定理からその逆像全体

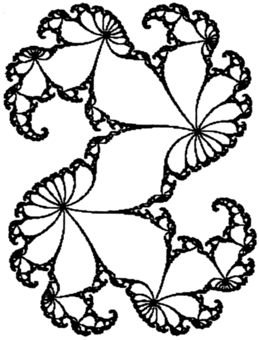
$$\{R_k = P_c^{-k}(R_0)\}_{k=0}^{\infty}$$

が $F_c - W$ を（形の違うこれらの「タイル」で）タイル貼りする、すなわち境界も入れれば R_k 全体で埋め尽くすことがわかる。

そこで、R_k の形の変化が問題となるが、まず $0 \in K_c$ のときは、$P_c(z)$ が P_0 と平行移動の合成であるから、各 R_k は $P_c(z)$ により R_{k-1} をちょうど 2 重に被覆することがわかる。すなわち、各 R_k も（厚みは異なるが）二つのジョルダン閉曲線で囲まれた「**縁取タイル**」で R_{k-1} の内縁の境界曲線に沿って R_{k-1} と貼り合わせられる。したがって、この場合には K_c、したがって J_c も、連結である。（すなわち、二つの共通点のない閉集合に分けられない。図 4.2 を参照せよ。）

---

[5] あるいは開写像定理から分かる



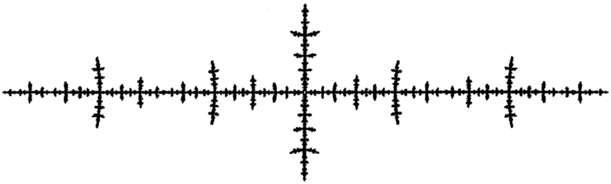


図 4.2　連結なジュリア集合の例

次に、0 が発散点の場合には、0 はどれかの R_k の内点であるとして良い。（そうでなければ r を取りかえれば良い。）そのようなタイルを R_N とすれば、R_{N-1} までは上述の場合と同様に、内縁へ貼られる「縁取りタイル」が続き、R_N で初めて形が「**ボタン**」、すなわち内縁の境界が二つのジョルダン閉曲線であるようなタイルに変わる。特に「ボタン」は二つの穴、すなわち $\mathbb{C}-D$ の有界な弧状連結成分、を持つ。この R_N を**最初の「ボタン」**と呼ぶ。

最初の「ボタン」以降は、最初の「ボタン」と等角写像でうつり合う「ボタン」が二つずつ得られ、したがって R_k は 2^{k-N} 個の「ボタン」からなり、内縁の境界曲線の各々に沿って（互いを他の上にうつす等角写像があるという意味で同じ）「ボタン」が貼りつけられてゆく。

系 4.8　　K_c は孤立点を持たない

[証明]　もし K_c が孤立点 z_0 を持つとすると、z_0 中心の円周 C で、$C \subset F_c$

かつ C の内側 U には K_c の点は z_0 のみであるものが取れる。

このとき、仮定から $P_c^M(C) \subset W^\circ$ となる M がある。実際、各点 $z \in C$ に対し、最初に $P_c^{M(z)}(z)$ が W° に飛び込むような正の整数 $M(z)$ が対応させられるが、$M(z)$ が有界でないとすれば、$M(z_k)$ が無限大に発散するような点列 z_k が C 上に選べることになる。しかし、その集積点の近傍では $M(z_k)$ は有界でなければならず矛盾である。

したがって $p_c^M(U) \supset \mathbb{C} - W^\circ$ であるから、0 が発散点であれば、U には C と z_0 を分離する「ボタン」が含まれなければならない。しかしこのとき、「ボタン」の穴の各々には（実数の完備性から）K_c の点がなければならず、C の取りかたに反するので、この場合はあり得ない。

一方、$0 \in K_c$ なら、K_c は連結より、$\{z_0\} = K_c$ でなければならない。特に $z_0 = 0$ は $P_c(z)$ の唯一の固定点であるから、

$$P_c(z) = P_0(z)$$

でなければならない。しかしこのとき K_c は 1 点ではなかったので、やはり矛盾を得る。 （証明終わり）

実は「ボタン」が現れる場合には、埋め尽くせない集合 K_c はカントール型の閉集合（すなわち孤立点を持たず、その任意の 2 点が F_c 内のジョルダン閉曲線で分離できる閉集合）であることが示せて、次の定理が成り立つ（図 4.3 も参照せよ）。

定理 4.9 (二者択一原理)

1. 原点が K_c の点でないならば、$K_c = J_c$ はカントール型の集合である。
2. 原点が K_c の点ならば K_c は連結である。

さて、二者択一原理の証明で残っているのは、「ボタン」が現れる場合に K_c の任意の 2 点が F_c 内のジョルダン閉曲線で分離できることだけである。これを示すことはそう容易ではなく、以下の補題の系（系 4.13 ）として得られる。

補題 4.10 (一様分離性) （$0 \notin K_c$ として）適当な円環 $W = \{1 < |z| < \delta\}$ を選べば、任意の R_k 内の任意のタイル D に対し、W から（D の中へ）の

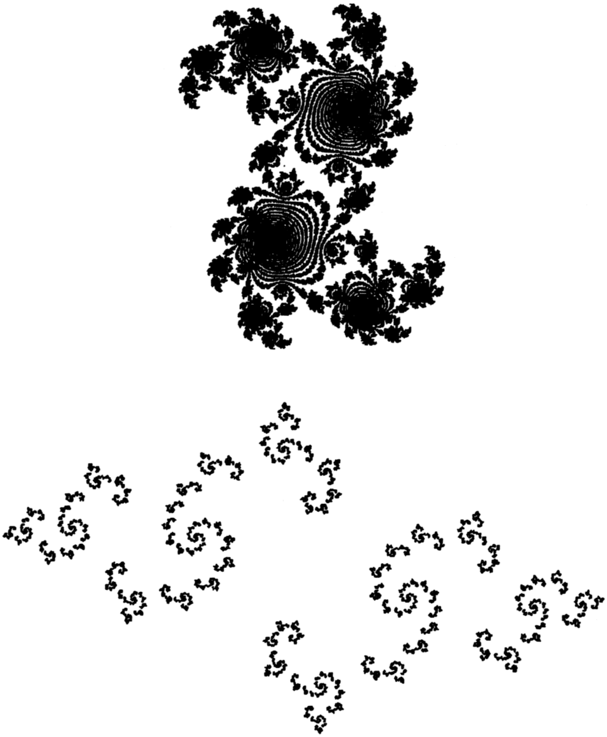


図 4.3　カントール型のジュリア集合の例

等角写像 f_D で、その像が D の外縁にあたる閉曲線と D の内縁あるいは穴全部とを分離するものがある。

[証明]　R_0 はそれ自身が十分薄い円環 $W_0 = \{r' < |z| < r\}$ を含む。次に R_1 が最初の「ボタン」でないとすると、W_0 の逆像

$$\tilde{R}_1 = (P_c)^{-1}(W_0) = \{z \in R_1 \mid P_c(z) \in W_0\}$$

も連結である。さらに $\tilde{R}_1$ は $P_c(z)$ で W_0 上に2重にうつされるから、$\tilde{R}_1$

の上で $\arg P_c(z)$ は 4π の整数倍を除いて定まる。したがって、

$$h(z) = (P_c)^{1/2}(z) = |P_c(z)|^{1/2} \exp\left(\frac{i}{2} \arg P_c(z)\right)$$

が $\tilde{R}_1$ 上の連続関数として定義でき、(例えば直接計算で) $\tilde{R}_1$ から

$$W_1 = \{(r')^{1/2} < |z| < r^{1/2}\}$$

上への等角写像であることが示せる。

以下同様に、最初の「ボタン」に至るまでの R_k も連結で、$\tilde{R}_k = (P_c^k)^{-1}(W_0)$ から

$$W_k = \{(r')^{1/2^k} < |z| < r^{1/2^k}\}$$

上への等角写像が見つかる。W_k はだんだんと薄くなるが、有限回で最初の「ボタン」に到着する。

最初の「ボタン」を R_N とすると、$0 \in R_N$ より $P_c^N(0) \in R_0$ だが、さらに $P_c^N(0) \in W_0$ なら W_0 を円環

$$W_0' = \{|P_c^N(0)| < |z| < r\}$$

に取り替えて前段の議論を行ない、得られた写像の逆写像を考えれば、$k = 0, \cdots, N$ に対し

$$W_k' = \{|P_c^N(0)|^{1/2^k} < |z| < r^{1/2^k}\}$$

から R_k の中への条件を満たす等角写像が得られる。

それ以降の R_k $(k > N)$ の各成分は R_N と等角写像でうつり合うから、$\delta = (r/\max\{|P_c^N(0)|, r'\})^{1/2^N}$ とすれば主張を得る。 (証明終わり)

補題 4.11 (長さ・面積法) 円環 $W = \{1 < |z| < r\}$ と、W の等角写像 $f(z)$ で $f(W)$ が $\{0, 1\}$ を ∞ と分離するものに対し、r のみに依存する正数 ϵ で、$\mathbb{C} - f(W)$ の有界でない弧状連結成分を U として常に

$$\inf_{z \in U} |z| \geq \epsilon$$

が成り立つものがある。

[証明]　固定された r に対し、W の等角写像 $f(z)$ で $f(W)$ が $\{0,1\}$ を $\epsilon e^{i\theta}$ $(1>\epsilon>0)$ と分離するものがあるとする。

このとき円環 $W_\epsilon=\{\epsilon<|w|<1\}$ 上で重み

$$\rho(w)=\frac{1}{|w|}$$

を付けた計量で同心円周

$$C_t=\{te^{i\theta}\mid 0\le\theta\le 2\pi\}\qquad (1<t<r)$$

の像の W_ϵ 内の部分の長さ ℓ_t を計算すると（ W_ϵ の補集合上では $\rho(w)=0$ として）

$$\ell_t=\int_{f(C_t)}\rho(w)|dw|\ge 2\int_\epsilon^1\frac{dr}{r}=2\log\frac{1}{\epsilon}$$

が得られる。

一方、

$$\begin{aligned}\iint_{f(W)}\rho(w)^2dudv&\le\iint_{W_\epsilon}\rho(w)^2dudv\\&=\int_0^{2\pi}\left(\int_\epsilon^1\frac{rdr}{r^2}\right)d\theta=2\pi\log\frac{1}{\epsilon}\end{aligned}$$

であるが、変数変換すれば、左辺は

$$\iint_W\rho(f(z))^2|f'(z)|^2dxdy$$

である[6]。

したがって、コーシー・シュヴァルツの不等式より

$$\ell_t^2=\left(\int_0^{2\pi}\rho(f(z))|f'(z)|td\theta\right)^2\le 2\pi t\int_0^{2\pi}\rho(f(z))^2|f'(z)|^2td\theta$$

の両辺を t で割って $[1,r]$ 上を t で積分すれば

[6] 本書では重積分の一般論には立ち入らない。大学初年度の微分積分学の教科書を参照されたい。ただ、定義は複素積分の場合と同様であり、ここでの主張は直観的には、変数変換により面積 $dxdy$ の微小な閉正方形が $|f'(z)|$ 倍の伸縮を受けて $|f'(z)|^2$ 倍の面積の微小な閉正方形になるということである。

$$\left(2\log\frac{1}{\epsilon}\right)^2 \log r \le 2\pi \int\int_W \rho(f(z))^2|f'(z)|^2 dxdy \le 4\pi^2 \log\frac{1}{\epsilon}$$

すなわち、

$$\epsilon \ge \exp\left(-\frac{\pi^2}{\log r}\right)$$

を得るから主張が示せた。 (証明終わり)

補題 4.12 (一様収縮性) ($0 \notin K_c$ として) 1 未満の正数 k で、任意の「ボタン」D に対し、E を D の穴の一つとするとき、

$$\mathrm{diam}\, E \le k\, \mathrm{diam}\, D$$

を満たすものがある。ただし、$\mathrm{diam}\, E$ は集合 E の直径

$$\sup\{|x-y| \mid x, y \in E\}$$

を表す。

[証明] E の 2 点 z と w で $|z-w| = \mathrm{diam}\, E$ となるものが見つかるから、そのような 2 点を固定する。このとき、補題 4.10 と補題 4.11 から D に依存しない正数 ϵ で z, w 中心の半径 $\epsilon|z-w|$ の円板が「ボタン」D の外縁にあたるジョルダン閉曲線の内側にあるようなものがある。したがって、

$$\mathrm{diam}\, D \ge (1+2\epsilon)|z-w| = (1+2\epsilon)\mathrm{diam}\, E$$

が成り立つから、主張を得た。 (証明終わり)

系 4.13 (退化性) 「ボタン」の列 $\{D_k\}$ で、各 D_{k+1} が D_k の穴の一つに含まれるものに対して、その直径の列は常に 0 に収束する。

[証明] 仮定を満たす「ボタン」の直径列は、前補題から少なくとも等比級数的に 0 に収束する。 (証明終わり)

以上で二者択一原理の証明が完結した。

次に、どのような点が J_c に含まれるかを調べよう。まず周期 ℓ の周期点がそれぞれ $P_c^{\ell}(z)$ の反発的、(超) 吸引的、中立的固定点であれば、その周

期点が**反発的**、（**超**）**吸引的**、**中立的**であると呼ぶ。このとき次の事実がわかる。

定理 4.14　$P_c(z)$ の反発的周期点は J_c に含まれる

[証明]　一般に、多項式 $P(z)$ が閉円板 $\{|z-z_0| \leq r\}$ 上で $|P(z)| \leq M$ を満たせば、コーシーの評価式から（円周に関する積分公式を用いた直接の評価により）

$$|P'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$$

が成り立つ。

さて、周期 ℓ の反発的周期点 z_0 に対し、$z_0 \in K_c$ は明らかである。一方、K_c の内点であるとすれば K_c の完全不変性から、十分小さい閉円板 $\{|z-z_0| \leq r\}$ 上で $(P_c^\ell)^k(z)$ は一様に有界である。そこで、$|(P_c^\ell)^k(z)| \leq M$ を満たすとすれば、

$$\left|\left((P_c^\ell)'(z_0)\right)^k\right| = \left|\left((P_c^\ell)^k\right)'(z_0)\right| \leq \frac{M}{r}$$

でなければならないが、これは z_0 が反発固定点であることと矛盾する。

（証明終わり）

実は反発的周期点は J_c 内で稠密である。この節では簡単のため原点が発散点のとき、すなわち $J_c = K_c$ がカントール型の場合に限って示すことにし、一般の場合の証明は5章5節で解説する。以下本節では、**原点は発散点であるとする**。

定理 4.15　反発的周期点は J_c 内で稠密である

[証明]　まず、J_c 内にある任意の $P_c(z)$ の周期点が反発的であることを示そう。そのため、かってな反復合成 $P(z) = P_c^M(z)$ を取り、$P(z)$ の固定点 z_0 を考える。穴に z_0 を含む「ボタン」D を固定し、「ボタン」D の外縁にあたるジョルダン閉曲線を C とする。ここで D を十分小さく取り、$P(z)$ による像も「ボタン」であるとしてそれを D' とすると、D' も一方の穴に z_0 を含み、その穴に D が含まれる。

「ボタン」D' の外縁にあたる閉曲線を C' とする。

$$\max_{w \in C'} |w - z_0| = |z' - z_0|$$

となる $z' \in C'$ を取り、「ボタン」D の外縁 C 上にある $P(z)$ に関する z' の逆像を ζ とする。また一様収縮性（補題 4.12 ）の主張にある k は（必要なら M をその倍数で置き換えて）$2k^M < 1$ を満たすとしてよい。このとき

$$|P(\zeta) - z_0| \geq \frac{1}{2} \operatorname{diam} D'$$

より

$$|\zeta - z_0| \leq \operatorname{diam} D \leq k^M \operatorname{diam} D' \leq 2k^M \, |P(\zeta) - z_0|$$

が成り立つ。一方、D と D' をさらに小さく取れば

$$\frac{|P(\zeta) - z_0 - P'(z_0)(\zeta - z_0)|}{|\zeta - z_0|} \geq \left(\frac{1}{2k^M} - |P'(z_0)| \right)$$

はいくらでも小さくできるから、$|P'(z_0)| > 1$ を得る。

さて、任意に J_c の点 w_0 を取り、その任意の近傍 U を固定するとき、退化性より、w_0 を穴に含み、U に含まれる「ボタン」D_1 がある。最初のボタンを D_0 として、D_1 を D_0 に等角にうつす反復合成を $P_c^L(z)$ とする。このとき、D_1 の穴に含まれる「ボタン」で、$P_c^L(z)$ で D_1 に等角にうつされるものがあるが、これを D_2 とする。以下繰り返して、「ボタン」の列 $\{D_k\}$ が定まるが、この集合列は 1 点 $w \in U$ からなる集合に収束し、w は $P_c^L(z)$ の固定点である。 （証明終わり）

定理 4.16 (擬似自己相似性) J_c と共通点をもつ任意の開円板 U に対し、十分大きい N を取れば $J_c \subset P_c^N(U)$ である

[証明] 任意に $J_c \cap U$ の点 w_0 を取ると、w_0 を穴に含み、U に含まれる「ボタン」D_1 があった。前証明と同様に、適当な反復合成 $P_c^L(z)$ で D_1 は最初の「ボタン」に等角にうつされるから、$P_c^L(U)$ は J_c を含む。

（証明終わり）

定義 リーマン球面の閉部分集合 E 上から E の中への連続な写像 $f(z)$ が

E 上で（デバニーの意味で）**カオス的**である[7] とは、次の3条件を満たすことである：

1. $f(z)$ の周期点が E 内で稠密である。
2. （位相的推移性）E と共有点を持つ任意の開集合 U と V に対し、

$$f^k(U \cap E) \cap (V \cap E) \neq \emptyset$$

　となる k がある。

3. （対初期値敏感性）適当な正数 δ を選べば、任意の $z \in E$ と、その任意の近傍 U に対し、$U \cap E$ の点 w と正の整数 M で（球面距離に関して）

$$\rho(f^M(z), f^M(w)) \geq \delta$$

　を満たすものが見つかる。

定理 4.17 (カオス性)　$P_c(z)$ の作用は J_c 上でカオス的である

[証明]　周期点の稠密性は既に示した（定理 4.15 ）。

次に J_c と交わる任意の開集合 U に対し、十分大きい N を取れば

$$P_c^N(U) \supset J_c$$

だから（定理 4.16 ）位相的推移性を得る。

最後に、最初の「ボタン」の二つの穴の球面距離を $\delta > 0$ とする。任意の $z \in J_c$ と、その任意の近傍 U に対し、z を穴に含み U に含まれる「ボタン」D をとり、D を最初の「ボタン」にうつす $P_c^L(z)$ を取れば、z の含まれる穴と異なる D の穴の点 w に対しては

$$\rho(P_c^L(z), P_c^L(w)) \geq \delta$$

を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

---

[7] 「カオス」という概念が数学的に確立されているわけではない。例えば、國府寛司著『力学系の基礎』（朝倉書店）を参照せよ。なお同書にあるように、Devaney は「ドゥヴェイニー」が正しい発音に近いが、ここでは本人による入門書の翻訳本『カオス力学系の基礎』（アジソン・ウェスレイ社）の表記に従った。

最後に以上の議論は記号化できる。

定義 2点 $\{0,1\}$ の無限列全体の集合

$$\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(m_0, m_1, \cdots) \mid m_j \in \{0,1\}\}$$

を（2文字の）**記号列空間**という。また、$(m_0, m_1, \cdots)$ を $(m_1, m_2, \cdots)$ にうつす Σ_2 の自己写像を**シフト写像**と呼ぶ。

ただし、Σ_2 には、カントールの3進集合への全単射

$$(m_1, m_2, \cdots) \mapsto \sum_j \frac{2m_j}{3^{j+1}}$$

が同相写像[8]であるような位相を与える。

この、Σ_2 上のシフト写像による力学系を（2文字の）**記号力学系**と呼ぶ。

上述と同様の議論で次の主張を得る。

命題 4.18 記号力学系はカオス的である。

課題 この命題を証明せよ。

4.3 調和関数とグリーン関数 *

多項式 $P_c(z) = z^2 + c$ を対合 $I(z) = 1/z$ で共役を取ると、原点で

$$I \circ P_c \circ I^{-1}(z) = z^2 + a_4 z^4 + \cdots +$$

というテーラー展開を持つ。したがって、ベットヒャの定理の証明での構成法から、無限遠点での次の主張を得る。

命題 4.19 無限遠点の近傍 U と U の等角写像 $\phi_c(z)$ で、$\phi_c(\infty) = 0$ かつ $\phi_c \circ I(z)$ の原点でのテーラー展開が

$$z + b_2 z^2 + \cdots$$

という表示を持ち、さらに $\phi_c(U)$ 上で

[8] 全単射が連続かつ逆写像も連続であることを意味する。

$$\phi_c \circ P_c \circ \phi_c^{-1}(z) = z^2$$

を満たすものがある。より具体的には、

$$\phi_c(z) = \lim_{k\to\infty} \left(P_c^k(z)\right)^{1/2^k} = z\prod_{k=0}^{\infty}\left(1 + \frac{c}{(P_c^k(z))^2}\right)^{1/2^{k+1}}$$

という表示で与えられる関数である。

そこで、

$$G_c(z) = \log|\phi_c(z)|$$

とすると、$U - \{\infty\}$ 上の連続関数が得られるが、さらに次の主張が成り立つ。

定理 4.20　$G_c(z)$ は発散点集合上の正値関数に一意的に拡張でき、さらに充填ジュリア集合上で 0 と定義すれば、複素平面全体で連続である。

[証明]　関数方程式

$$\phi_c \circ P_c \circ \phi_c^{-1}(z) = z^2$$

より、

$$G_c(P_c(z)) = 2G_c(z)$$

が成り立つ。一方構造定理より、任意の発散点 z に対し適当な $M > 0$ を取れば $P_c^M(z) \in U$ である。そこで、

$$G_c(z) = \frac{1}{2^M}\, G_c(P_c^M(z))$$

と定義すれば、この値が M の取りかたに依存しないことがわかる。

さらに U を構造定理の W のように十分「遠い」ものに取りなおし $U \supset P_c(\overline{U})$ としてよい。このとき K_c の任意の十分小さい近傍 V を選ぶと、$P_c^k(V)$ が U と交わらなければ、任意の $z \in V$ に対し

$$G_c(z) \leq \frac{1}{2^k} \sup_{w\in U - P_c(U)} G_c(w)$$

が成り立つ。したがって z と K_c の距離が 0 に収束するとき $G_c(z)$ も 0 に収束する。（証明終わり）

上記の実関数 $G_c(z)$ は、ある意味で K_c からの自然な「高さ」を表している。なぜ自然か、という根拠はその調和性にある。

定義 複素平面の領域 D 上の実数値関数 $u(z)$ （$z = x + iy$ と考え $u(x, y)$ とも記す）は、x と y に関して C^2-級（すなわち、2 回まで自由に偏微分可能でかつ得られた偏導関数も連続）であるとする。このとき、$u(z)$ が D 上**調和**であるとは、

$$\Delta u(z) = u_{xx}(z) + u_{yy}(z) = 0$$

が恒等的に成り立つことである[9]。

課題 コーシー・リーマン方程式を用いて、正則関数の実部や虚部は調和であることを示せ。

例 4.7 領域 D 上の正則関数 $f(z)$ が零点を持たなければ、

$$u(z) = \log |f(z)|$$

は D 上調和である。実際、$\log f(z)$ が局所的には正則関数であることからわかる（系 3.56）。

実は、任意の調和関数が局所的には正則関数の実部である。

定理 4.21 $B = \{|z| \leq R\}$ を含む領域で調和な関数 $u(z)$ から

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta$$

により B の内部で複素関数を定めると、$f(z)$ は B の内部で正則で実部が $u(z)$ に一致する。

[証明] まず、B を含む円板 U 上で $u(z)$ が調和であるとし、

$$g(z) = u_x(z) - iu_y(z)$$

---

9 **課題** C^2-級の関数については二つの偏微分の順序は交換できる、すなわち $u_{xy}(z) = u_{yx}(z)$ である。これを示せ。

とすると、これは C^1-級の関数で、

$$(\operatorname{Re} g)_x(z) = u_{xx}(z) = -u_{yy} = (\operatorname{Im} g)_y(z)$$

$$(\operatorname{Re} g)_y(z) = u_{xy}(z) = u_{yx} = -(\operatorname{Im} g)_x(z)$$

であるから、コーシー・リーマン方程式を満たし、U 上で正則である。したがって、単連結な U 上では原始関数 $F(z)$ を持つ（定理 3.55）。さらに

$$(\operatorname{Re} F)_x(z) = \operatorname{Re} g(z) = u_x(z),$$
$$(\operatorname{Re} F)_y(z) = -(\operatorname{Im} F)_x(z) = u_y(z)$$

であるから、適当に定数を加えれば、$F(z)$ は実部が $u(z)$ と一致する U 上の正則関数である。

したがって B の内部の各点 z に対し、コーシーの積分公式より、

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(Re^{i\theta})\frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta}-z}d\theta \\ &= \frac{1}{2}F(0) + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(Re^{i\theta})\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}d\theta \end{aligned}$$

が得られる。一方、コーシーの積分定理から、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(Re^{i\theta})\frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta}-(R^2/\overline{z})}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(Re^{i\theta})\frac{\overline{z}}{\overline{z}-Re^{-i\theta}}d\theta \end{aligned}$$

であるが、両辺の複素共役を取れば

$$0 = -\frac{1}{2}\overline{F(0)} + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \overline{F(Re^{i\theta})}\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}d\theta$$

を得る。これらの等式を加えれば

$$F(z) = i\operatorname{Im} F(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}d\theta$$

となり主張を得る。　（証明終わり）

系 4.22　領域 D の正則関数 $f(z)$ による像が領域 D' に含まれているとき、D' の任意の調和関数 $u(z)$ に対し、$u(f(z))$ は D 上の調和関数である。

[証明] 調和関数 $u(z)$ が局所的には正則関数の実部であるから $u(f(z))$ もそうである。 (証明終わり)

系 4.23 (ポアソン公式) $B=\{|z|\leq R\}$ を含む領域で調和な関数 $u(z)$ に対し

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(Re^{i\theta})\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}d\theta$$

が成り立つ。ただし、$z=re^{i\phi}$ $(r<R)$ とする。

[証明] 定理の積分表示式で、両辺の実部を取れば

$$\mathrm{Re}\,\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}=\frac{R^2-r^2}{|Re^{i\theta}-z|^2}=\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}$$

であることからわかる。 (証明終わり)

系 4.24 (最大最小値原理) 領域 D 上での調和関数 $u(z)$ が定数でなければ、D 内では最大値も最小値も取らない。

[証明] ポアソン公式を用いれば、正則関数の最大値原理（定理 3.39）の場合と同様の議論で証明できる。 (証明終わり)

系 4.25 (ハルナックの不等式) $B=\{|z|\leq R\}$ を含む領域で正値で調和な関数 $u(z)$ に対し

$$\frac{R-r}{R+r}u(0)\leq u(re^{i\theta})\leq\frac{R+r}{R-r}u(0)$$

が成り立つ。ただし、$r<R$ とする。

[証明] ポアソン公式において、

$$\frac{R-r}{R+r}\leq\frac{R^2-r^2}{|Re^{i\theta}-z|^2}\leq\frac{R+r}{R-r}$$

であるから主張を得る。 (証明終わり)

さて領域 D に対し、その補集合が二つの共通点を持たない閉集合 K_1 と K_2 に分かれるとき、それらの物理的な距離は次のような関数を考えることにより測られる。

定義　領域 D の補集合が二つの共通点を持たない閉集合 K_1 と K_2 に分かれるとき、D 内で調和で D の閉包上連続な関数 $u(z)$ で K_1 上 0 かつ K_2 上 1 となるものを、D の K_1 と K_2 に対する**調和測度**と呼ぶ。

調和測度は常に定義できるわけではないが、あれば最大最小値原理より一意的に定まる[10]。調和測度が定義できるとき、K_1 と K_2 を分離する任意の求長可能なジョルダン閉曲線 C に沿う流量

$$\mathrm{Flux}(u) = \int_C (-u_y dx + u_x dy)$$

の絶対値の平方根が K_1 と K_2 の自然な距離を与える。（一般化されたグリーン・ストークスの定理を既知と仮定すれば、

$$|\mathrm{Flux}(u)| = \int\int_D (u_x(z)^2 + u_y(z)^2) dxdy$$

すなわち、$u(z)$ のディィリクレエネルギー量にも等しいことがわかる。）

さて、K_1 と K_2 の一方が1点に退化したときは、調和測度もまた退化してしまう（章末の演習問題 3 にある除去可能性定理を参照せよ）ので、この場合には「点電荷」にあたるものを、1点に退化した方に与える。これがグリーン関数と呼ばれる高さ関数の物理的意味である。

定義　有界閉集合 E の補集合 $D = \hat{\mathbb{C}} - E$ が領域であるとする。領域 D の無限遠点を極とする**グリーン関数** $G(z:\infty)$ とは、D 上の正値調和関数で E で 0 と定めれば複素平面全体で連続になり、かつ

$$g(z) = G\left(\frac{1}{z}:\infty\right) + \log|z|$$

が原点まで調和に拡張できるものとする[11]。

注意　グリーン関数は、最大最小値原理と調和関数の除去可能性定理から、あれば一意的であることがわかる。

命題 4.26　本節で定義した $G_c(z)$ は発散点集合 F_c の無限遠点を極とす

10　いつ定義できるかに答える問題をディィリクレ問題と呼ぶが、詳細は割愛する。

11　一般には $D - \{\infty\}$ 上の正値調和関数 $u(z)$ で $u(1/z) + \log|z|$ が原点まで調和に拡張できるものの中で最小の関数として定義される。



図 4.4 マンデルブロ集合

るグリーン関数である。

4.4 マンデルブロ集合

定義 $P_c(z)$ による原点の軌道が有界となるパラメータ c 全体の集合を**マンデルブロ集合**と呼び、$\mathcal{M}$ で表す（図 4.4 を見よ）。

定理 4.27 マンデルブロ集合 $\mathcal{M}$ は有界閉集合で

$$\mathcal{M} \subset \{|c| \leq 2\}$$

である。また、$c \in \mathcal{M}$ と J_c が連結であることとは同値である。

[証明] 実際、$|c| > 2$ なら

$$|P_c^2(0)| = |c^2 + c| \geq |c|(|c| - 1) > |c| > 2$$

だから、発散点条件より主張を得る。第二の主張は二者択一原理からわかる。最後に $\mathcal{M}$ が閉集合であることは次の補題からわかる。（証明終わり）

命題 4.28

$$g(c, z) = G_c(z)$$

とおくとき、$g(c,z)$ は $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 上の連続関数で、

$$\mathcal{M}=\{c\in\mathbb{C}\mid g(c,c)=0\}$$

である。

[証明]　まず、$z\in\mathbb{C}-K_c$ ならば前述から

$$G_c(z)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\max\{0,\log|P_c^k(z)|\}$$

であった。この右辺は $z\in K_c$ のときは 0 であるから、上の等式は複素平面全体で成立する。そこで、この右辺の収束が $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ で広義一様であることを示せば、各

$$\log^+|P_c^k(z)|=\max\{0,\log|P_c^k(z)|\}$$

は $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 上連続であるから、主張を得る。

そのため $|c|\leq M<\infty$ とすると、z に関して $\mathbb{C}$ 上一様に

$$|\log^+|P_c(z)|-2\log^+|z||\leq\big||P_c(z)|-|z^2|\big|\leq|c|\leq M$$

だから、

$$\left|\frac{1}{2^k}\log^+|P_c^k(z)|-\frac{1}{2^{(k-1)}}\log^+|P_c^{k-1}(z)|\right|\leq\frac{M}{2^k}$$

を得て、左辺の和は等比級数で一様に評価できる。　　　　（証明終わり）

証明は割愛するが、さらに写像 $\phi_c(c)$ はマンデルブロ集合の補集合を

$$\Delta^*=\{|z|>1\}\cup\{\infty\}$$

上に等角に写像することが示せて、$\mathcal{M}$ の $\hat{\mathbb{C}}$ での補集合が単連結であることがわかる。すなわち、次の定理を得る。

定理 4.29 (ドゥアディ・ハバード)　マンデルブロ集合は連結である

なお、次の予想は未解決である。

課題　**(局所連結性予想)**　上記の $\hat{\mathbb{C}}-\mathcal{M}$ から Δ^* 上への等角写像 $f(c)=\phi_c(c)$ に対し、その逆写像 $f^{-1}(z)$ は Δ^* の閉包まで連続に拡張できる。

最後に、マンデルブロ集合の内部は無限個の共通点の無い領域に分かれる。本書では、その各々を**マンデルブロの泡**と呼ぶ。その代表例として、同じ周期の吸引的周期点を持つパラメータからなる領域があるが、そのいくつかを具体的に与えよう。

定理 4.30 (主泡) 吸引的固定点を持つような P_c に対応する c の集合は

$$\left\{ \frac{e^{i\theta}}{2} - \frac{e^{2i\theta}}{4} \;\middle|\; 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

で囲まれた領域である[12]。

[証明] 実際、$P_c(z_c) = z_c$ かつ $|P'(z_c)| < 1$ を満たす c の集合だから、

$$|z_c| < 1/2, \qquad c = z_c - z_c^2$$

とパラメータ表示される。z_c を消去すれば主張を得る。（証明終わり）

定理 4.31 (周期 2 の泡) 周期 2 の吸引的周期点を持つような P_c に対応する c の集合は円板

$$\left\{ |z+1| < \frac{1}{4} \right\}$$

である。

[証明] 同様に

$$P_c(z_c) \neq z_c, \quad P_c^2(z_c) = z_c, \quad |(P_c^2)'(z_c)| < 1$$

から z_c を消去すれば主張を得る。（証明終わり）

以下同様に、任意周期の吸引的周期点を持つような P_c に対応する c の集合を計算することができる。

定義 すべての吸引的周期点に対応するマンデルブロの泡全体の和集合を**双曲性集合**と呼ぶ。

---

12 等角写像を用いて述べれば、円板 $\{|z-(1/2)| < 1/2\}$ を $P_0(z)$ でうつし、さらにその像を合同変換 $T(z) = -z + (1/4)$ でうつしたときの像（カージオイドの内側）が主泡である。

双曲性集合は K_c が J_c と一致しないようなパラメータ値からなるが、そのような値の全体とは一致しない。

また、双曲性集合の閉包は、次章の結果を用いれば、マンデルブロ集合の境界を含むことも証明できる。この閉包がさらにマンデルブロ集合と一致するであろうという次の予想は未解決である。

課題　**(双曲性稠密予想)** 双曲性集合はマンデルブロ集合内で稠密である。

4.5　演習問題

1)　次の各2次式をグラフ解析せよ。

$$y = x^2 + 1, \qquad y = x^2 + 1/4, \qquad y = x^2,$$

$$y = x^2 - 1/2, \qquad y = x^2 - 3/4, \qquad y = x^2 - 1,$$

$$y = x^2 - 4/3, \qquad y = x^2 - 7/4$$

2)*　平面内の任意の二つのカントール型の有界閉集合 E_1 と E_2 に対し、平面の連続な全単射で、E_1 を E_2 の上にうつすものがあることを示せ。

3)　単位円板から原点を除いた領域 D 上で有界な調和関数は単位円板上の調和関数に拡張できること（**調和関数の除去可能性定理**）を、（たとえば D の上正値調和関数 $\ln|z|$ を用いて）示せ。

4)　円環 $\{1 < |z| < r\}$ の $\{|z| \leq 1\}$ と $\{|z| \geq r\}$ に対する調和測度の流量を求めよ。

5)　線分 $[0,1]$ の補集合 $\hat{\mathbb{C}} - [0,1]$ の、無限遠点を極とするグリーン関数を求めよ。

6)　マンデルブロ集合は実軸対称である。その理由を説明せよ。

7)　次の各々の値がマンデルブロ集合に属すか否かを答えよ。

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad i, \quad 2i, \quad \frac{1+i}{4}, \quad -1+\frac{i}{4}, \quad -1+i$$

第5章
或る解決　カオスと正規族

与えられた変換を無限に反復合成してゆくときの意味のある理論を完成せよ。その際に与えられた変換そのものや与える初期値の影響を考慮せよ。あるいは最も簡単な場合（付記：1変数の有理関数のような場合）に限って考察してもよい。

1918年グランプリ懸賞問題

良いニュースはいつも小さな声で語られる。僕はその言葉を思い出して微笑もうとした。でもそんなにうまくいかなかった。

『ねじまき鳥クロニクル』村上春樹

Riemann 以降、リーマン球面への正則写像の研究は成熟し多岐にわたっていく。たとえば Abel と Jacobi による楕円関数論は、複素解析の文脈のなかで 20 世紀初頭までには飛躍的に整備されていった。また、1918 年のグランプリを獲得した Julia や Fatou らにとっては Montel による正規族の理論は不可欠なものであった。

有理型関数に対する解析学も Picard らによる考察から Nevanlinna を経て、20 世紀前半には一応の完成を見る。Ahlfors が第 1 回フィールズ賞を獲得したのも、Nevanlinna の値分布理論を幾何学化した業績（1935 年公刊）によるものであった。

5.1　孤立特異点と有理型関数

リーマン球面への写像は、無限遠を値に取ることができるようになる。このような「関数」も複素関数と呼ぶが、この新たな可能性がもたらす影響を、円板内のテーラー展開と円周上のフーリエ展開の中間に位置するローラン展開を用いて分析しよう。

定理 5.1　円環[1] $D = \{r < |z-\alpha| < R\}$ $(0 \le r < R \le +\infty)$ 上で正則な関数 $f(z)$ は D で絶対収束かつ広義一様収束する級数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-\alpha)^k$$

に一意的に展開できる[2]。

さらに、係数 a_k は一意的で、

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_t} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{k+1}} d\zeta$$

で与えられる。ただし、$r < t < R$ に対し $C_t = \{|z-\alpha| = t\}$ とし、原点に関する回転数が 1 になるように（すなわち $\{|z-\alpha| < t\}$ を左側に見る向きに）回るものとする。

[証明]　まず、$r < r' < R' < R$ を満たす r' と R' を任意に取り、$C_{r'}$ と $C_{R'}$ で囲まれた領域 D' に対してコーシーの積分公式を適用すると、D' 内の任意の z に対し

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{-1}{2\pi i}\int_{C_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

を得る。そこで右辺を $f_2(z)+f_1(z)$ と表すとき、$f_2(z)$ は円板 $\{|z-\alpha| < R'\}$ 上で正則で、テーラー展開 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-\alpha)^k$ の係数 a_k は

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{k+1}} d\zeta$$

であった。さらに定理 3.25 の証明での議論と同様に、$|\zeta-\alpha| = r' < |z-\alpha|$ なら

$$\frac{-1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta-\alpha)^k}{(z-\alpha)^{k+1}}$$

と展開でき、右辺は領域 $\{|z-\alpha| > r'\}$ 上で絶対収束かつ広義一様収束す

---

[1] $r = 0$ の場合や $R = +\infty$ の場合も**円環**と呼ぶ。ここで円環も、円板と同様に、常に開集合であるとする。

[2] 絶対収束性から、無限個の項 $a_k(z-\alpha)^k$ はどういう順に加えても良いので、このような記法を用いる。

る。特に z を D' 内に固定するとき、

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha)^{-k-1}}{2\pi i} \int_{C_{r'}} (\zeta-\alpha)^k f(\zeta) d\zeta \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(z-\alpha)^k}{2\pi i} \int_{C_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{k+1}} d\zeta \end{aligned}$$

が得られる。そこで $k<0$ に対しても

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{k+1}} d\zeta$$

と定義すれば、

$$|a_k| \leq \frac{2\pi}{(r')^k} \max_{\zeta \in C_{r'}} |f(\zeta)|$$

だから、$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z-\alpha)^k$ は $\{|z-\alpha|>r'\}$ で絶対収束かつ広義一様収束する。

さらに各係数 a_k は（コーシーの積分定理より）r' や R' の取りかたによらないから、級数 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-\alpha)^k$ は D 上で絶対収束かつ広義一様収束する。最後に、係数（したがって分解）の一意性は項別積分により示せる。収束定理（補題 3.9 ）を見よ。 （証明終わり）

定義　この展開を $f(z)$ の円環 D での**ローラン展開**という。

以下で議論するのは、$r=0$ の場合で、このとき α を $f(z)$ の**孤立特異点**と呼ぶ。ローラン展開を用いれば、孤立特異点を 3 種類に分類できる。

定義　円環 $D=\{0<|z-\alpha|<R\}$ 上正則な関数 $f(z)$ のローラン展開を

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-\alpha)^k$$

とするとき、

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z-\alpha)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-\alpha)^k}$$

を α での $f(z)$ の**主要部**という。

すべての負のベキの係数 $a_{-k}\,(k>0)$ が 0 のとき、α での $f(z)$ の主要部がない、あるいは α で $f(z)$ が**除去可能**な特異点であるという。次に 0 でない負のベキの係数が有限個しかないとき、$f(z)$ は α で**極**を持つという。さらに主要部が

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_{-k}}{(z-\alpha)^k} \quad (a_{-N} \neq 0)$$

のとき N を極の**位数**と呼ぶ。最後に主要部が無限個の項からなるとき、α を $f(z)$ の**真性特異点**という。

注意　α が $f(z)$ の除去可能な特異点であるとき、$f(\alpha)=a_0$ と定義すれば、$f(z)$ は $\{|z-\alpha|<r\}$ 上で正則で、

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-\alpha)^k$$

とテーラー展開できる。

また、α が N 位の極であるときは、零点の孤立性の証明と同様の議論で、原点の近傍で正則な関数 $g(z)$ で

$$f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)^N} g(z) \qquad g(\alpha) \neq 0$$

を満たすものがあることがわかる。逆に α でこのような表示を持てば、α は N 位の極である。

定義　円環 $\{R<|z|<+\infty\}$ で正則な関数 $f(z)$ に対しては、無限遠点が孤立特異点であり、そのローラン展開を

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_{-k} z^{-k}$$

と分割するとき、$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ を $f(z)$ の ∞ での**主要部**と呼ぶ。上述と同様に、孤立特異点 ∞ は、主要部がないときは**除去可能な特異点**、多項式のときは**極**、それ以外は**真性特異点**という。

無限遠点が上定義中の $f(z)$ の除去可能な特異点の場合には、対合 $I(z)$ に対応する $1/z$ を w で置き換えれば、そのローラン展開は $f(I(w))$ の原点で

の通常のテーラー展開

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{-k}w^k$$

となる。極や真性特異点を持つ場合も同様で、無限遠点を孤立特異点に持つ正則関数の ∞ での局所的な状況は複素平面の点での状況と変わらない。

例 5.1 指数関数 e^z は ∞ で真性特異点を持つ。一方、$e^{1/z}$ は原点で真性特異点を持つが ∞ は除去可能である。

そこで次の二つの定理では、簡単のため有限な孤立特異点についてのみ述べることにし、さらにその特異点が原点であるとする。

定理 5.2 (リーマンの除去可能性定理) 円環 $\{0<|z|<r\}$ 上正則な関数 $f(z)$ に対し、$M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|$ とするとき、

$$\lim_{r\to 0} M(r,f)=+\infty$$

でなければ（すなわち、この極限が定まらないか、定まっても $+\infty$ でないとき）原点は $f(z)$ の除去可能な特異点である。

[証明] 仮定より、正数 M と 0 に収束する正数列 $\{r_k\}$ で、任意の k に対して

$$M(r_k,f)\le M$$

を満たすものが取れる。$f(z)$ のローラン展開を

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j$$

とするとき、$j<0$ なら（ $r_k<1$ として）

$$|a_j|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_k}\frac{f(z)}{z^{j+1}}dz\right|\le Mr_k^{-j}\le Mr_k$$

で、右辺は $k\to+\infty$ のとき 0 に収束するから、$a_j=0$ を得る。

（証明終わり）

系 5.3　円環 $\{0 < |z| < r\}$ 上正則な関数 $f(z)$ に対し、原点が極であることと、（リーマン球面への写像として）

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \infty$$

であることは同値である。

[証明]　まず原点が $f(z)$ の極ならば、そのローラン展開は原点で ∞ となる有理式とベキ級数の和だから

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \infty$$

である。

逆に

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \infty$$

とすると、$1/f(z)$ は原点の近傍で有界だから、リーマンの除去可能性定理より原点で 0 とおけば正則である。原点が N 位の零点とすると、零点の孤立性より原点の近傍で

$$\frac{1}{f(z)} = z^N g(z), \qquad g(0) \neq 0$$

を満たす正則関数 $g(z)$ がある。このとき、$h(z) = 1/g(z)$ も原点のある近傍で正則で

$$f(z) = \frac{1}{z^N} h(z)$$

であるから、原点は高々極であるが、仮定より実際に極である。

（証明終わり）

定理 5.4 (ヴァイエルシュトラスの散乱定理)　円環 $D = \{0 < |z| < r\}$ 上正則な関数 $f(z)$ が原点に真性特異点を持つとき、任意の $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し D 内の点列 $\{z_k\}$ で

$$\lim_{k \to \infty} z_k = 0, \quad \lim_{k \to \infty} f(z_k) = \alpha$$

を満たすものがある[3]。

[証明]　まず $\alpha = \infty$ の場合は、主張が成り立たなければ $f(z)$ は原点の近傍で有界であるから、原点が除去可能な特異点となってしまい仮定に反する。

α が有限値の場合は、主張が成り立たなければ r を小さく取りかえて、$f(D)$ の閉包が α を含まないとしてよい。このとき、

$$\frac{1}{f(z) - \alpha}$$

は D 上有界だから、原点は除去可能な特異点である。したがって前系の証明での議論と同様に $f(z)$ は原点で高々極でなければならず仮定に反する。

（証明終わり）

系 5.5　複素平面の双正則自己同型は相似変換に限る。

[証明]　$\mathbb{C}$ の双正則自己同型 $f(z)$ は系 5.3 より、無限遠点で極を持つ。∞ での $f(z)$ の主要部を $P(z)$ とすると、定義より $f(z) - P(z)$ は全平面で有界、したがって定数となる。$f(z)$ が単射であるから $P(z)$ は 1 次式となり、$f(z)$ は相似変換である。（証明終わり）

定義　リーマン球面内の領域 D 上の複素関数 $f(z)$ が、極を除き正則であるとき、$f(z)$ は D 上で**有理型**であるという。

命題 5.6　リーマン球面内の領域 D 上の有理型関数の極は、D の内点には集積しない。（したがって、恒等的に ∞ となる定数関数は有理型関数に含まない。）

また、D 上の有理型関数の和・差・積や（定数関数 0 以外を分母とする）商もまた、有理型関数である。

[証明]　領域 D 上の有理型関数 $f(z)$ の極が、D の内点 α に収束すると仮定する。このとき、α も高々極だから、上の注意より α の近傍で正則な関数 $g(z)$ と正の整数 N で

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - \alpha)^N}$$

[3] 4 節に述べるピカールの小定理も参照せよ。

（$\alpha = \infty$ の場合は $f(z) = z^N g(z)$ ）を満たすものがあるが、これは仮定に反する。

後半もこのような表示を用いれば容易に示せる。　（証明終わり）

系 5.7　リーマン球面上の有理型関数は有理関数（多項式の商）に限る。

[証明]　極の集合が集積点を持たないことから、リーマン球面上の有理型関数 $f(z)$ は有限個の極しか持ち得ない。したがって、それらの極での主要部の総和 $R(z)$ は有理関数である。このとき、$f(z) - R(z)$ は除去可能な特異点しか持たないからリーマン球面全体で正則である。特に連続だから有界にもなり、絶対値が最大値を取る点がある。しかしこのとき最大値原理から定数関数である。　（証明終わり）

定義　リーマン球面内の領域 D からリーマン球面への連続写像 $f(z)$ が**正則写像**であるとは、各 $z \in D$ とその像 $f(z)$ のそれぞれの適当な近傍を、適当なメビウス変換 $T_1(z)$ および $T_2(z)$ でそれぞれ平面領域にうつしたとき、合成写像 $T_2 \circ f \circ T_1^{-1}(z)$ が複素関数として正則であることである。（2章での等角写像の定義でのように、無限遠点に対してのみ対合による変換を考えても十分である[4]。）

注意　この用語を用いれば、有理型関数はリーマン球面への正則写像である。（リーマン球面への正則写像には、∞ を値に持つ定数値写像も含まれることに注意せよ。）

さて、孤立特異点にはもう一つの分類法がある。これは、コーシーの積分定理が成り立たなくなる「障害」の程度による分類で、その程度を表す量を留数と呼ぶ。

---

[4] すなわち、D からリーマン球面への正則写像 $f(z)$ とは

1. $\infty, f^{-1}(\infty)$ を D から除いた領域上正則で
2. $\infty \in D$ のときは、$f(\infty) \neq \infty$ なら $f(I(z))$、$f(\infty) = \infty$ なら $I(f(I(z)))$ が、0 の近傍で正則で、
3. $\infty \in f(D - \{\infty\})$ のときは $I(f(z))$ が $f^{-1}(\infty)$ の近傍で正則である

ものとする。

定義　複素平面の点 α に対し、円環 $D=\{0<|z-\alpha|<R\}$ 上正則で α を孤立特異点に持つ複素関数 $f(z)$ の α での**留数** $\mathrm{Res}_\alpha f(z)$ を、D 内の求長可能なジョルダン閉曲線 C で $n(C,\alpha)=1$ となるものに対し、

$$\mathrm{Res}_\alpha f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

で定義する。

円環 $D=\{R<|z|<+\infty\}$ 上で正則で、∞ を孤立特異点に持つ複素関数 $f(z)$ の場合にも、**無限遠点での留数** $\mathrm{Res}_\infty f(z)$ を同様に、D 内の求長可能なジョルダン閉曲線 C で、$n(C,0)=1$ となるものに対し、

$$\mathrm{Res}_\infty f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

で定義する（定義にマイナスが付くのは、C の向きを C の外側の境界としての向きとは逆に取っているからである。系 5.11 の後の注意も見よ）。

注意　有限な α に対しては $\{0<|z-\alpha|<r\}$ でのローラン展開を

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-\alpha)^k$$

とすれば、項別積分、すなわち収束定理（補題 3.9 ）、により

$$\mathrm{Res}_\alpha f(z)=c_{-1}$$

であることがわかる。

無限遠点の場合には、$\{R<|z|<+\infty\}$ でのローラン展開を

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

とすれば、

$$\mathrm{Res}_\infty f(z)=-c_{-1}$$

である[5]。

---

[5] したがって無限遠点では、正則であっても留数は 0 とは限らないし 1 位の極であっても留数は 0 かも知れない。これは、本来留数が関数 $f(z)$ ではなく微分形式 $f(z)dz$

定義から、コーシーの積分定理（定理3.46）は、例えば次のように書き換えることができる。

定理 5.8 (拡張された積分定理 I)　複素平面内の領域 D 上で孤立点集合 $\{\alpha_k\}$ を除き正則な関数 $f(z)$ と、D 内の求長可能な $\{\alpha_k\}$ を通らない閉曲線 C で任意の $\alpha \in \mathbb{C} - D$ に対し

$$n(C, \alpha) = 0$$

を満たすものに対し、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \sum_k n(C, \alpha_k)\mathrm{Res}_{\alpha_k} f(z)$$

が成り立つ（ここで、左辺は有限和である）。

[証明]　各 α_k 中心の十分小さい閉円板 B_k を $D - C$ に含まれ、かつ互いに共有点を持たないように取り、$C_k = \partial B_k$ とする。このとき、形式和

$$C' = C + \sum_k n(C, \alpha_k)(-C_k)$$

で表される閉曲線の有限集合は、任意の k に対して

$$n(C', \alpha_k) = 0$$

を満たすから、$D' = D - \bigcup_k \{\alpha_k\}$ に対しコーシーの積分定理（定理 3.46）の仮定を満たす。したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz &= \frac{1}{2\pi i}\sum_k n(C, \alpha_k)\int_{C_k} f(z)dz \\ &= \textstyle\sum_k n(C, \alpha_k)\mathrm{Res}_{\alpha_k} f(z)\end{aligned}$$

を得る。　(証明終わり)

なお、無限遠点を含む領域の場合にも同様に定式化できる。ここでは簡単のためジョルダン曲線の場合にのみ述べる。

定理 5.9 (拡張された積分定理 II)　複素平面内の求長可能なジョルダン閉

の特異性を量化しているためである。しかし、この問題にはこれ以上立ち入らない。

曲線[6] C と、C の外側の閉包および無限遠点を含むリーマン球面の部分領域 D 上で無限遠点を含み C の点は含まない孤立点集合 $\{\alpha_k\}$ を除き正則な関数 $f(z)$ に対し、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = -\sum_k \mathrm{Res}_{\alpha_k} f(z)$$

が成り立つ。ここで、左辺は C の外側に含まれる a_k についての和で、有限和である。

[証明] まず無限遠点以外のすべての α_k を内部に含むような十分大きい閉円板 B を取り、$C_\infty = \partial B$ とする。C_∞ と $-C$ で囲まれた領域 Ω では定理 5.8 が適用でき、任意の k に対して $n(C_\infty, \alpha_k) = 1$ であるから

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\infty} f(z)dz - \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \sum_{\alpha_k \in \Omega} \mathrm{Res}_{\alpha_k} f(z)$$

を得る。一方定義より、左辺第 1 項は無限遠点での $f(z)$ の留数にマイナスをつけたものであるから主張を得る。（証明終わり）

系 5.10 リーマン球面上有限個の点を除き正則な関数に対し、リーマン球面上のすべての点での留数の総和は 0 である。

[証明] 除かれた有限個の点を含まない閉円板 B を取れば $C = \partial B$ に沿う元の関数の複素積分は上定理より、留数の総和のマイナスに等しい。一方、その積分値は積分定理により 0 である。（証明終わり）

系 5.11 (偏角原理) 複素平面内の求長可能なジョルダン閉曲線 C に対し、その内側を D とする。D の閉包を含む領域上の有理型関数 $f(z)$ が、C 上には零点も極も持たないならば、

$$n(f(C), 0) = n(0, f, D) - n(\infty, f, D)$$

が成り立つ。ただし、$n(0, f, D)$ と $n(\infty, f, D)$ はそれぞれ D 内の $f(z)$ の零点と極の、重複度を込めて数えた個数である。

---

6 向きは、内側を U として $C = \partial U$ となる向きを取る。

[証明]　拡張された積分定理 I より

$$n(f(C),0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{f(C)}\frac{dw}{w}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

は、$f(z)$ の零点と極における $f'(z)/f(z)$ の留数の総和に等しい。

一方、$f(z)$ の N 位の零点 α においては、その近傍で正則な関数 $g(z)$ で

$$f(z)=(z-\alpha)^N g(z), \qquad g(\alpha)\neq 0$$

を満たすものがあるから、

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{N}{z-\alpha}+\frac{g'(z)}{g(z)}$$

となり、求める留数は N となる。同様に M 位の極での求める留数は $-M$ であることもわかるから、主張を得る。　（証明終わり）

注意　球面上では回転数は 2 点の順序対に対してしか定義できない。偏角原理の左辺は実は、$\{0,\infty\}$ という順序対に関する $f(C)$ の回転数である。

定理 5.12 (ルーシェの定理)　複素平面内の求長可能なジョルダン閉曲線 C に対し、その内側を D とする。D の閉包を含む領域上の有理型関数 $f(z)$ が、C 上には零点も極も持たないとする。やはり D の閉包を含む領域上で有理型な関数 $g(z)$ が、C 上で

$$|f(z)|>|g(z)|$$

を満たすならば、

$$n(0,f,D)-n(\infty,f,D)=n(0,f+g,D)-n(\infty,f+g,D)$$

が成り立つ。

[証明]　偏角原理より

$$n(f(C),0)=n((f+g)(C),0)$$

を示せばよい。一方 C 上の z については

$$\arg(f(z)+g(z))=\arg f(z)+\arg\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

が成り立つが、右辺第 2 項にある

$$h(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$$

の値は仮定より 1 中心の半径 1 の開円板に含まれる。したがって

$$n(h(C), 0) = 0$$

だから、主張を得る。　（証明終わり）

例 5.2　点 α 中心の円板 U 上の正則関数 $f(z)$ が α を固定するとき

$$\iota(f, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - f(z)}$$

を $f(z)$ の α における**正則指数**という。ただし、C は $n(C, \alpha) = 1$ を満たす U 内の十分 α に近いジョルダン閉曲線である。

ここで $\alpha \neq \infty$ として、$f'(\alpha) \neq 1$ ならば

$$\iota(f, \alpha) = \frac{1}{1 - f'(\alpha)}$$

で、$f'(\alpha) = 1$ のときは、命題 *3.62* より

$$f(z) = \alpha + (z - \alpha) - (z - \alpha)^{N+1} + \beta(z - \alpha)^{2N+1} + O(|z - \alpha|^{2N+2})$$

という表示を持つとしてよいが、このとき

$$\iota(f, \alpha) = \beta$$

となる。

命題 5.13　恒等写像以外の有理関数 $f(z)$ に対し、

$$\sum \iota(f, z) = 1$$

が成り立つ。ただし、和はすべての $f(z)$ の固定点 z について取る。

課題　命題 5.13 を証明せよ。

最後に、ジョルダン閉曲線 C の近傍で正則な関数の C に沿う複素積分の値が C の内部にある留数の和として表せて、かつ積分路 C が適当な変形や

極限操作により、一部の積分路を捨てることで求めるべき実変数の積分に収束するとき、そのような実変数の積分を留数の和として求める方法を**留数計算**という。

その成功の鍵は、求められるべき実変数の積分に対し、

1. 複素関数 $f(z)$ を適切に決めることができ、
2. 積分路として適当な閉曲線 C で、その内部で $f(z)$ が有限個の孤立特異点を除き正則なものを決めることができ、
3. その一部に沿う $f(z)$ の積分が、C をうまく変形してゆくとき無視できたり、求める積分に関係する量に収束するようなものを発見することができる

ことである。

もちろん、留数が求められることが前提となる。一例を挙げよう。

例 5.3

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx$$

を留数計算で求めるには、まず、

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1}$$

を考え、ジョルダン閉曲線としては、任意の $R>0$ に対し

$$C_R = [-R,R] + \{Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

を考える。

このとき、$f(z)$ は全複素平面で有理型であり、$C_R - (-R,R)$ に沿う積分は $\pi R/(R^4-1)$ 以下であるから、$R \to +\infty$ のとき 0 に収束する。一方、$f(z)$ の $[-R,R]$ に沿う積分は求める実の定積分の 2 倍に収束するから、留数計算が可能な環境が得られたことになる。そこで、C_R の内部にある点での留数の和を求めると

$$2\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx = 2\pi i(\mathrm{Res}_{e^{i\pi/4}} f(z) + \mathrm{Res}_{e^{i3\pi/4}} f(z)) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

である。ここで $f(z)$ は $e^{i\pi/4}$ で 1 位の極を持つから、例えば

$$\mathrm{Res}_{e^{i\pi/4}} f(z) = \lim_{z\to e^{i\pi/4}} (z - e^{i\pi/4}) f(z) = \lim_{z\to e^{i\pi/4}} \frac{1}{(z^4+1)'} = \frac{e^{-i3\pi/4}}{4}$$

である。（1 位の極に対するこの計算法も応用上有用である。）

なお問題によっては多価性を利用したり部分積分を併用したりと、留数計算の手法は多様であるので、個別に工夫しなければならない[7]。

5.2　正規族

反復合成で得られる関数列にとっては、初期値に対する安定性とは近い初期値に対する関数の値が一様に近いことを意味する。数学的にはこれは、そのような関数列の同程度連続性として定式化できる。

定義　リーマン球面内の集合 E 上で定義された複素関数の族（集合）$\mathcal{F}$ が E の点 z でリーマン球面への写像として**同程度連続**であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対し、正数 δ で条件「$\rho(z, w) < \delta$ を満たす任意の $w \in E$ に対し、すべての $f \in \mathcal{F}$ が $\rho(f(z), f(w)) < \epsilon$ を満たす」が成り立つものが見つかることである。

一方、正則性は広義一様収束により遺伝した。したがって、正則関数の族の閉性が、次のように定義できる。

定義　リーマン球面上の領域 D 上で定義された複素関数の族 $\mathcal{F}$ が D 上で**正規族**であるとは、$\mathcal{F}$ 内の任意の元の無限列から常に D 上広義一様収束する、すなわち D 内に含まれる任意のコンパクト集合上で一様収束する部分列が選べることとする。

ここでも複素関数をリーマン球面への写像と見なす。すなわち、一様収束性は球面距離 ρ に関して定義され、常に無限遠点を値に持つ定数値写像も認める。（定数値写像としては、他の定数値写像と区別できない。）

このとき、次の事実は基本的である。

---

[7] 具体例を章末にいくつか挙げるに止める。章末の演習問題 4-7 を参照せよ。

命題 5.14　リーマン球面内の領域 D 上でリーマン球面への写像として連続な複素関数の族 $\mathcal{F}$ が正規族であることと、$\mathcal{F}$ が D 上の各点でリーマン球面への写像として同程度連続であることとは同値である。

[証明]　まず、$\mathcal{F}$ が正規族であるとする。このとき、D の1点 z で同程度連続でないとすれば、ある正数 ϵ で、任意の正の整数 k に対し $\rho(z, w_k) < 1/k$ を満たす $w_k \in D$ と $\rho(f_k(z), f_k(w_k)) \geq \epsilon$ を満たす $f_k \in \mathcal{F}$ が取れるものがある。しかし仮定から、この列 $\{f_k\}$ の部分列 $\{f_{k'}\}$ で、D 上の連続関数 $f(z)$ に広義一様収束するものが取れる。$w_{k'}$ は z に収束するから、

$$
\begin{aligned}
0 &= \rho(f(z), f(z)) = \lim_{k' \to \infty} \rho(f(z), f(w_{k'})) \\
&\geq \lim_{k' \to \infty} \{\rho(f_{k'}(z), f_{k'}(w_{k'})) \\
&\quad -\rho(f(z), f_{k'}(z)) - \rho(f(w_{k'}), f_{k'}(w_{k'}))\} \\
&= \lim_{k' \to \infty} \rho(f_{k'}(z), f_{k'}(w_{k'})) \geq \epsilon
\end{aligned}
$$

となり矛盾を得る。

次に、$\mathcal{F}$ が D の各点で同程度連続であるとして、正規族であることを示そう。そのため D 内の稠密な可算部分集合 $\{z_m\}$ を選ぶ。

さて、任意に $\mathcal{F}$ の元の列 $\{f_k\}$ が与えられたとき、まず z_1 で収束するような部分列 $\{f_{1,k}\}$ を選ぶ。次にその部分列で、z_2 で収束するような部分列 $\{f_{2,k}\}$ を選ぶ。以下繰り返して、$\{f_{m,k}\}$ の部分列で、z_{m+1} で収束するような部分列 $\{f_{m+1,k}\}$ を選ぶと、$\{f_{k,k}\}$ はすべての z_m で収束する（いわゆる対角線論法である）。

このとき、$\{g_k = f_{k,k}\}$ は D に含まれる任意のコンパクト集合 E 上で一様収束することを示せば主張を得る。まず同程度連続性から、任意の $\zeta \in E$ と正数 ϵ に対し、正数 $\delta = \delta(\zeta)$ で、条件「$\rho(\zeta, w) < \delta$ を満たす任意の $w \in D$ に対して、すべての $g_k(z)$ が $\rho(g_k(\zeta), g_k(w)) < \epsilon$ を満たす」が成り立つものがある。そこで、各 $\zeta \in E$ 中心の半径 $\delta(\zeta)$ の円板 $U(\zeta)$ を考えると、$\bigcup_{\zeta \in E} U(\zeta) \supset E$ だから、そのなかの有限個で E が覆えるが、それらを $U(\zeta_1), \cdots, U(\zeta_M)$ とする。さらに $\{z_m\}$ の番号を付け替えて $z_\ell \in U(\zeta_\ell)$ としてよい。また十分大きい N を選べば、N より大きい任意の k と j および任意の $\ell = 1, \cdots, M$ に対し

$$
\rho(g_k(z_\ell), g_j(z_\ell)) < \epsilon
$$

が成り立つ。一方、任意の $z \in E$ に対して、$z \in U(\zeta_\ell)$ を満たす ℓ がある。そのような ℓ を固定すると、N より大きい任意の k と j に対し、一様コーシー条件：

$$\begin{aligned}\rho(g_k(z), g_j(z)) \quad \le \quad & \rho(g_k(z), g_k(\zeta_\ell)) + \rho(g_k(\zeta_\ell), g_k(z_\ell)) \\ & + \rho(g_k(z_\ell), g_j(z_\ell)) + \rho(g_j(z_\ell), g_j(\zeta_\ell)) \\ & + \rho(g_j(\zeta_\ell), g_j(z)) < 5\epsilon\end{aligned}$$

が成り立つ。　（証明終わり）

注意　上の定理は、アルツェラ・アスコリの定理の特別な場合である。また、領域 D 上の連続関数族 $\mathcal{F}$ は、D の各点の近傍に制限したときに正規族であれば、D 上正規族であることもわかる（章末の演習問題 8 ）。

系 5.15 (モンテルの定理)　リーマン球面内の領域 D 上で一様に有界な正則関数の族は正規族である。

[証明]　任意に $z \in D$ を固定し、与えられた族をその適当な近傍へ制限した関数族が正規族であることを示せばよい。そこで、D は有界な領域であるとしてよい。一方、複素平面内の有界な集合 E 上では、球面距離とユークリッド距離は同値である。すなわち、正数 C で

$$\frac{1}{C}|z-w| \le \rho(z,w) \le C|z-w|$$

が E の任意の 2 点 z と w に対し成り立つものが取れる。したがって、ユークリッド距離に関する同程度連続性を、D の各点 z で示せば、命題 5.14 より主張を得る。

そのため、z 中心で閉包が D に含まれる円板 U を固定し、その半径を $\delta > 0$ とする。さらに仮定から $f(z) \in \mathcal{F}$ なら U 上 $|f(z)| < M$ を満たすとする。このとき、$|z - z'| < \delta/2$ を満たす任意の $z' \in U$ に対し、コーシーの積分公式（定理 3.49 ）より

$$\begin{aligned}|f(z) - f(z')| &\le \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'}\right)d\zeta\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}|z - z'|\int_{\partial U}\frac{|f(\zeta)|}{|(\zeta - z)(\zeta - z')|}|d\zeta|\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2M}{\delta^2}|z - z'|$$

を得るので、z での同程度連続性を得た。（証明終わり）

注意　上で与えた証明は、D 上の一様に有界な正則関数の族は D の各点で「同程度リプシッツ連続」であることを示している。

モンテルの定理は、特に単位円板の正則自己写像の反復合成からなる関数の族が正規族であることを意味している。さらにその部分列の極限関数の分類も、次のダンジョワ・ウォルフの定理として知られている。ただし、ここでの定理は本来のものより弱い形で述べる。

定理 5.16 (ダンジョワ・ウォルフの定理)　単位円板 Δ の正則自己写像 $f(z)$ が Δ の閉包まで連続に拡張できるとする。このとき、$f(z)$ の反復合成に対し、以下のいずれかが成り立つ。

1. $f(z)$ の反復合成全体の集合 $\{f^k(z)\}$ は有限個の写像からなる。（このとき $f(z)$ の位数は有限であるという。）
2. $\{f^k(z)\}$ は Δ 内の 1 点 z_f を値に持つ定数関数に Δ 上広義一様収束する。
3. $f(z)$ の位数が有限でなく、かつ $\{f^k(z)\}$ の部分列で、恒等写像に広義一様収束するものがある。
4. $\{f^k(z)\}$ は単位円周の 1 点 z_f を値に持つ定数関数に Δ 上広義一様収束する。

さらに、以上の各々の現象は同時には起こり得ない。

定義　2. や 4. のとき、z_f を f の **ダンジョワ・ウォルフ点**と呼ぶ。

この定理の証明として「鏡映原理」と呼ばれる事実を用いるものを述べる。この原理は次の定理の直接の帰結である。

命題 5.17 (パンルベの定理)　内点を共有しない二つの領域 D_1, D_2 が円弧あるいは線分 I を境界の部分弧として共有するとする。各 D_j 上正則な関数 $f_j(z)$ が $D_j \cup I$ まで連続に拡張できるとき、I 上で $f_1(z) = f_2(z)$ が

成り立てば、

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in D_1 \cup I \\ f_2(z) & z \in D_2 \cup I \end{cases}$$

は $D_1 \cup I \cup D_2$ の内部 D 上で正則である。

[証明]　D に含まれる I の点 z_0 の近傍上で $f(z)$ が正則であることを示せばよい。さらに必要ならメビウス変換と合成して、I は実軸の一部であるとしてよい。

そこで、z_0 を囲む D 内の任意の軸平行な閉長方形 R を取り、その周を C とする。実軸の任意の近傍 $V = \{z \mid |\mathrm{Im}\, z| < \epsilon\}$ は R と交わり、$R - V$ は高々 2 個の閉長方形である。今本当に 2 個の場合のみを考えて、R_1, R_2 とし、その周を C_1, C_2 とする。このとき、

$$\int_{C_j} f(z)dz = 0 \qquad (j = 1, 2)$$

であるが、R 内の V の境界の部分に沿う複素積分は

$$\int_{I \cap R} \{f(x - \epsilon i) - f(x + \epsilon i)\}dx$$

と書ける。$f(z)$ は R 上一様連続だから、$\epsilon \to 0$ のとき、C_1 と C_2 に沿う複素積分は C に沿う複素積分と、$\mathbb{R} \cap R$ を往復する曲線に沿う複素積分の和（すなわち 0 ）に収束することがわかる。すなわち、

$$\int_C f(z)dz = 0$$

である。したがってモレラの定理（定理 3.29 ）より z_0 の近傍での正則性を得る。（証明終わり）

定理 5.18 (鏡映原理)　領域 D_1 が円弧あるいは線分 I を境界の部分弧として含むとする。I を含む円周または直線に関する鏡映変換を $R(z)$ とし、$D_2 = R(D_1)$ とする。

D_1 上正則な関数 $f(z)$ が $D_1 \cup I$ まで連続に拡張でき、さらに $f(I)$ がある円周または直線 L に含まれるとすると、

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D_1 \cup I \\ R^* \circ f \circ R(z) & z \in D_2 \end{cases}$$

は $D_1 \cup I \cup D_2$ の内部 D 上で有理型であり、特に L が直線なら正則である。ただし、$R^*(z)$ は L に関する鏡映変換である。

[証明] $L \cap D$ の各点の近傍でパンルベの定理の仮定が満たされることを確認すれば良いが、定義より I 上では $f(z) = R^* \circ f \circ R(z)$ である。

(証明終わり)

最後にダンジョワ・ウォルフの定理を証明しよう。

まず、ピックの補題（定理 3.44 ）より、$f(z)$ は双曲距離 λ に関して（広義の）縮小写像である。すなわち、単位円板 Δ の任意の2点 z と z' に対し

$$\lambda(f(z), f(z')) \leq \lambda(z, z')$$

が成り立つ。

さて1点 $z_0 \in \Delta$ に対し、その軌道 $\{f^k(z_0)\}$ が**散逸**するとする。すなわち、原点中心で半径が1より小さい任意の閉円板 B に対し、$\{k \mid f^k(z_0) \in B\}$ が有限集合であるとする。このとき z_0 と $f(z_0)$ とを結ぶ双曲線分を L とする。縮小性から、$f^k(L)$ の双曲弧長は L の双曲弧長より大きくならず有界だが、$f^k(z_0)$ は Δ の境界に向かうから、ユークリッド距離に関しては $f^k(L)$ の直径は0 に収束する。そこで、それらを順次つないでできる曲線を Γ とする。Γ の $\mathbb{C}$ での閉包から Γ を除いた集合 C は連結だから単位円周上の閉弧である。

さらに、1点 $\zeta \in C$ に収束する $\{f^k(z_0)\}$ の部分列 $\{z_{k'}\}$ を取ると、$f(z_{k'})$ と $z_{k'}$ とのユークリッド距離は 0 に収束するから $f(\zeta) = \zeta$ が成り立つ。特に C が1点でないとすると、C 上 $f(\zeta) = \zeta$ で鏡映原理の仮定を満たす。したがって鏡映原理より $f(z)$ は C を越えて正則に拡張でき、一致の定理より Δ 内でも $f(z) = z$ でなければならないが、これは仮定に反する。すなわち、C はただ1点 z_f からなる。したがって、$\{f^k(z_0)\}$ は z_f に収束する。さらに、任意の点 $z \in \Delta$ に対しても、z_0 との双曲距離を考えれば同様の議論で、$\{f^k(z)\}$ が z_f に収束することもわかる。

実はこのとき、$\{f^k(z)\}$ は z_f に Δ 上広義一様収束している。実際[8]、そうでないとすると、Δ 内の閉円板 B、正数 c および、部分列 $\{f^{k'}(z)\}$ で、

$$\sup_{z\in B} |f^{k'}(z) - z_f| \geq c\,(>0)$$

がすべての k' に対し成り立つものがなければならない。特に、モンテルの定理よりさらに部分列を適当に取れば $\{f^{k'}(z)\}$ は B 上一様収束するとしてよいが、その極限は定数関数 z_f ではあり得ない。これは矛盾なので主張を得る。以上で $\{f^k(z_0\}$ が散逸する場合には 4. が起こることがわかった。

次にある軌道 $\{f^k(z_0)\}$ が散逸しないとする。すなわち、ある $z_0 \in \Delta$ に対し、$\{z_k = f^k(z_0)\}$ の部分列 $\{z_{k'}\}$ で Δ 内の 1 点 z_f に収束するものが取れるとする。

まず、Δ の各点においてピックの不等式で真に不等号が成り立つとすれば、たとえば、和集合 $\bigcup_{k'} \{z_{k'}\}$ の閉包から双曲距離が $\lambda(z_0, f(z_0))$ 以下の点からなるコンパクト集合 E 上では、$f(z)$ は双曲計量に関して真に縮小写像である。

そこで z_0 と $f(z_0)$ を結ぶ双曲線分を L とすると、$f^{k'}(L) \subset E$ だから $f^{k'}(L)$ の双曲弧長は等比数列で上から押さえられる。したがって $\{f(z_{k'})\}$ も z_f に収束し、z_f は $f(z)$ の固定点であることがわかる。次に以前と同様の議論で $\{f^k(z)\}$ が広義一様に定数関数 z_f に収束することもわかり、2. の場合になる。

最後にピックの不等式で 1 点で等号が成り立つとすれば、$f(z)$ はメビウス変換であったから、固定点を Δ 内に持たなければ散逸する。したがって $f(z)$ は Δ 内の点を固定する楕円型変換で、位数有限なら 1. が、無限なら 3. が起きることは容易に示せる。（証明終わり）

5.3 リーマン写像と単葉関数

等角写像に関して最も基本的な事実は次の定理である。

定理 5.19 (リーマンの写像定理) リーマン球面上の任意の単連結領域 D

---

[8] 前段での議論と同様に示すこともできるが、ここでは正規族の議論で示しておく。

に対し、

1. リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$
2. 複素平面 $\mathbb{C}$
3. 単位円板 Δ

のいずれか、かつその一つのみ、の上への等角写像が見つかる。

以下、次のリーマン写像の定義まではこの定理の証明である。

まず排反性を示す。リーマン球面全体から複素平面内への等角写像は実際に最大値を取らなければならないので、最大値原理より定数関数でなければならず、あり得ない。複素平面から単位円板への等角写像は、今度はリュービユの定理から定数関数でなければならず、やはりあり得ない。

次に、リーマン球面から1点 α を除いた単連結領域は、複素平面 $\mathbb{C}$ の上への等角写像 $1/(z-\alpha)$ を持つ。そこで、複素平面内の全体とは異なる任意の単連結領域 D に対し、D から単位円板 Δ 上への等角写像があることを示せば主張を得る。その証明は長いので3段階に分ける。

主張 1　D は有界としてよい。

実際、仮定より $\mathbb{C}-D$ の1点 α を固定するとき、

$$f(z)=(z-\alpha)^{1/2}=\exp((1/2)\log(z-\alpha))$$

が D 上正則な関数として定義できる（系 3.56 ）。さらに $f(z)$ は単射である。これは $f(z_1)=f(z_2)$ なら $z_1-\alpha=f(z_2)^2=f(z_1)^2=z_2-\alpha$ であることからわかる。

そこで、像 $D'=f(D)$ を考えると、同様の議論で各 $w\in D'$ に対しては $-w\notin D'$ であることがわかる。特に D' の1点 w_0 を固定し、w_0 中心の半径 $R>0$ の円板 U で D' に含まれるものを取ると、$-U=\{w\mid -w\in U\}$ は D' の補集合に含まれる。したがって

$$g(z)=\frac{1}{z+w_0}$$

は D' 上 $|g(z)|\leq 1/R$ を満たすから、D から有界領域への等角写像 $g\circ f(z)$ が得られた。

（証明終わり）

主張 2　D の 1 点 z_0 を固定し、D から複素平面内の領域への等角写像 $f(z)$ で

$$f(z_0)=0, \qquad |f(z)|<1$$

を満たすもの全体からなる族 $\mathcal{F}$ を考えると、$\mathcal{F}$ の中に

$$f'_\infty(z_0)=\sup_{f(z)\in\mathcal{F}}|f'(z_0)|$$

を満たす関数 $f_\infty(z)$ がある。

実際、主張 1 から、$D\subset\{|z-z_0|<R<+\infty\}$ とすると $\mathcal{F}$ は $f(z)=(z-z_0)/R$ を含むから空集合ではなく、一様に有界な正則関数の族だから、モンテルの定理より正規族である。

ここで $f(z)\in\mathcal{F}$ なら $e^{i\theta}f(z)$ $(\theta\in\mathbb{R})$ も $\mathcal{F}$ の元だから、$M=\sup_{f(z)\in\mathcal{F}}|f'(z_0)|$ として $f'_k(z_0)$ が M に収束するような $\mathcal{F}$ の元の列が取れる。さらに D 上正則な関数 $f_\infty(z)$ に広義一様収束しているとしてよい。このとき正則性の遺伝性（定理 3.41 ）より $f_\infty(z_0)=0$ かつ $f'_\infty(z_0)=M$ である。（特に M は有限である。）また、$|f_\infty(z)|\le 1$ も明らかであるが、$f(z)$ は定数でないから最大値原理より D 上で $|f_\infty(z)|<1$ でなければならない。最後に単射性は、次のフルヴィッツの定理から得られ、$f_\infty(z)\in\mathcal{F}$ が示せた。

（証明終わり）

命題 5.20 (フルヴィッツの定理)　領域 D の等角写像 $f_k(z)$ の列が非定数関数 $f(z)$ に広義一様収束するならば、$f(z)$ もまた D の等角写像である。

[証明]　定理 3.41 から $f(z)$ は正則であった。単射でないとすると、D の異なる 2 点 z_1 と z_2 で $f(z)$ で同じ点 w_0 にうつるものが見つかる。ここで $f(z)$ は開写像であるから、w_0 中心の半径 r の閉円板 B で $f(D)$ に含まれるものが取れる。局所構造定理（命題 3.57 ）より、r を十分小さく取れば B の内部 U の逆像 $f^{-1}(U)$ は、D 上のジョルダン閉曲線 C_1 と C_2 で囲まれた D 内の単連結領域 D_1 と D_2 で、それぞれ、z_1 と z_2 を含むものを弧状連結成分として含む。

さて一様収束性から k を十分大きくしておけばジョルダン閉曲線 C_j 上で $|f(z)-f_k(z)|<r$ としてよい。このときルーシェの定理より、w_0 に $f_k(z)$

でうつる点が D_1 内にも D_2 内にもあることになり、$f_k(z)$ の単射性に反する。（証明終わり）

主張 3　$f_\infty(z)$ は D を単位円板の上にうつす等角写像である。

実際もしそうでないとすると、単位円板内の一点 w_0 で、像 $f_\infty(D)$ には含まれないものがある。$w_0 \neq 0$ としてよいが、

$$F_1(z) = \left(\frac{f_\infty(z) - w_0}{1 - \overline{w_0} f_\infty(z)}\right)^{1/2}$$

を考えれば、D の単連結性から $F_1(z)$ は D 上の正則関数として定義できる。さらに、主張1での議論と同様に、$f_\infty(z)$ の単射性から $F_1(z)$ の単射性が示せる。D 上 $|F_1(z)| < 1$ であることも定義より明らかである。さらにメビウス変換でうつして

$$F_2(z) = \frac{F_1(z) - F_1(z_0)}{1 - \overline{F_1(z_0)} F_1(z)}$$

とすると、$F_2(z_0) = 0$ だから、$F_2(z) \in \mathcal{F}$ となる。

一方、

$$F_2'(z) = \frac{1 - |F_1(z_0)|^2}{(1 - \overline{F_1(z_0)} F_1(z))^2} F_1'(z)$$

かつ

$$F_1'(z) = \frac{1}{2F_1(z)} \frac{1 - |w_0|^2}{(1 - \overline{w_0} f_\infty(z))^2} f_\infty'(z)$$

であるから

$$F_2'(z_0) = \frac{1 + |w_0|}{2(-w_0)^{1/2}} f_\infty'(z_0)$$

を得る。したがって

$$|F_2'(z_0)| > |f_\infty'(z_0)|$$

となり、仮定に反する。

以上でリーマンの写像定理の証明が終わった。（証明終わり）

定義　単連結領域 D から単位円板上への等角写像を D の**リーマン写像**と

いう。

一方、単位円板 Δ から複素平面の中への等角写像（リーマン写像の逆関数）を、特に Δ 上の**単葉関数**と呼ぶ（3章3節を参照せよ）。

リーマン写像およびその逆関数としての単葉関数には、その挙動に特に厳しい制約が生じる。そのような系列の定理をいくつか述べておく。

命題 5.21 (ビーベルバッハの面積定理)　単位円板 Δ 上の単葉関数 $f(z)$ がテーラー展開

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_k z^k + \cdots$$

を持つとき、

$$|a_2| \leq 2$$

である。

[証明]　まず $f(z)$ の零点は原点のみだから

$$w = F(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{f(z^2)}{z^2}\right)^{-1/2}$$

は奇関数で、Δ 上の単射な有理型関数を表わすことがわかる。その原点でのローラン展開は

$$F(z) = \frac{1}{z} - \frac{a_2}{2}z + \cdots$$

としてよい。このとき任意の $r \in (0,1)$ に対し、ジョルダン閉曲線 $F(\{|z| = r\})$ の内側 D の面積 $S(D)$ は、$w = u + iv$-平面上で（滑らかな）曲線で挟まれた部分の面積公式

$$S(D) = -\int_{\partial D} v du = \int_{\partial D} u dv$$

より

$$S(D) = \frac{1}{2i}\int_{\partial D} \overline{w} dw = \frac{-1}{2}\int_0^{2\pi} \overline{F(re^{i\theta})} F'(re^{i\theta}) re^{i\theta} d\theta$$

であるが、ローラン展開を代入して直接計算すれば

$$0 < \pi \left\{ \frac{1}{r^2} - \left| \frac{a_2}{2} \right|^2 r^2 - \cdots \right\}$$

で右辺の第2項目以降はすべてマイナスされる非負の値となる。したがって、$r \to 1$ とすれば主張を得る。　（証明終わり）

命題 5.22 (ケーベの 1/4 定理)　単位円板 Δ 上の単葉関数 $f(z)$ が $f(0) = 0$ かつ $f'(0) = 1$ を満たすとき、

$$f(\Delta) \supset \left\{ |z| < \frac{1}{4} \right\}$$

が成り立つ。

[証明]　$f(z)$ の原点でのテーラー展開を $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ とする（このとき、$a_0 = 0, a_1 = 1$ である）。像 $f(\Delta)$ に含まれない点 α ($\neq 0$) を任意に取り、

$$g(z) = \frac{\alpha f(z)}{\alpha - f(z)}$$

とすると、$g(z)$ も Δ 上の単葉関数で、そのテーラー展開は

$$g(z) = z + (a_2 + \alpha^{-1}) z^2 + \cdots$$

となる。したがって $f(z)$ と $g(z)$ に面積定理を適用すれば

$$|\alpha^{-1}| \leq |a_2| + |a_2 + \alpha^{-1}| \leq 2 + 2 = 4$$

を得る。これは主張を意味する。　（証明終わり）

命題 5.23 (ケーベの歪曲定理)　単位円板 Δ 上の単葉関数 $f(z)$ が $f(0) = 0$ かつ $f'(0) = 1$ を満たすとき、任意の $z \in \Delta$ に対して

$$|f'(z)| \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}$$

が成り立つ。

[証明]　任意に Δ の1点 ζ を固定し

$$h(z) = \frac{1}{(1 - |\zeta|^2) f'(\zeta)} \left\{ f\left(\frac{z + \zeta}{1 + \overline{\zeta} z} \right) - f(\zeta) \right\}$$

と定義すると、$h(z)$ は Δ 上の単葉関数で、その原点でのテーラー展開は

$$h(z) = z + \frac{1}{2}\left((1-|\zeta|^2)\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - 2\overline{\zeta}\right)z^2 + \cdots$$

となることが直接計算でわかる。したがって面積定理より

$$\left|(1-|\zeta|^2)\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - 2\overline{\zeta}\right| \leq 4,$$

すなわち任意の $z \in \Delta$ に対し

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

が成り立つ。特に $z = re^{i\theta}$ の偏角 θ を固定するとき、半径 r に関する $\log|f'(re^{i\theta})|$ の偏導関数は、$|z| = r$ として

$$\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})| = \frac{1}{r}\operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \leq \frac{2r+4}{1-r^2}$$

を満たす。これを r で積分すれば求める不等式を得る。　　　　（証明終わり）

5.4　モデュラー関数 *

さて、リーマンの写像定理により様々な領域の等角写像の存在が保証された。この節では、3 個の辺で囲まれた面積有限な双曲タイルの中では最も双曲面積が大きい「理想双曲 3 角タイル」のリーマン写像を用いて、「理想双曲 4 角タイル」による上半平面のタイル貼りに使われる各タイルの上で同じ挙動をする正則写像[9]を構成しよう。

例 5.4　「理想双曲 3 角タイル」

$$D = \{z \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1, |z - 1/2| > 1/2, \operatorname{Im} z > 0\}$$

のリーマン写像にメビウス変換 $M(z) = i(1+z)/(1-z)$ を合成すれば、D から上半平面 H の上への等角写像を得る。この写像を（D 上の）**モデュ**

[9] 各貼り合わせ変換を「周期」に持つと言ってもよいが、一般には（周期関数とは呼ばずに）貼り合わせ変換群に関する**保型関数**と呼ばれる。

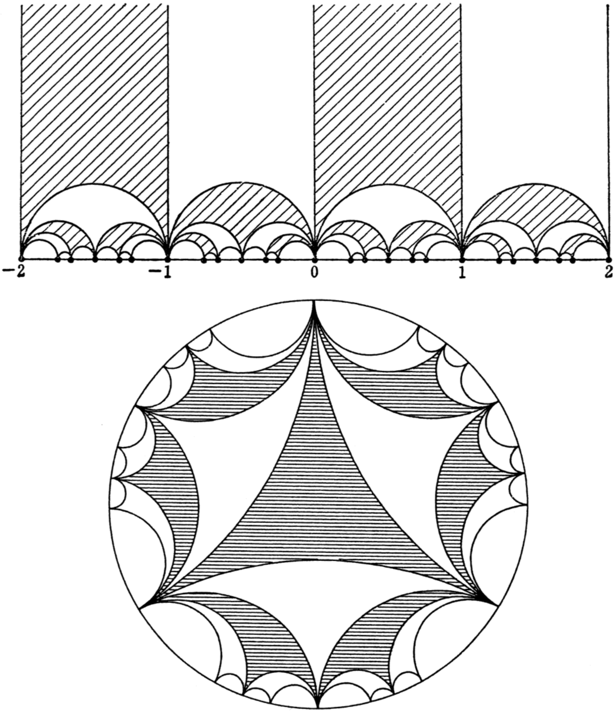


図 5.1　市松模様の理想双曲3角形タイル（二態）

ラー関数と呼び $\lambda(z)$ で表す[10]。

モデュラー関数を上半平面 H 上の正則関数に拡張しよう。まず貼り合わせ変換群 $\Gamma(2)$ に対するタイルとして、

$$T=\{z \mid |\mathrm{Re}\, z|<1,\ |z\pm 1/2|>1/2,\ \mathrm{Im}\, z>0\}$$

が取れる。T の右、左半分（の内部）は、上記の「理想双曲3角タイル」と双曲平面内で合同になるが、それら T の半タイル $Dr=D$、D_l をモデュ

10　以下でさらに正規化をおこなう。また、この関数を具体的に書き下すことは容易ではないが6節に述べるペー関数を用いた表示を与えることができる。例 6.6 を見よ。

ラー関数 $\lambda(z)$ と

$$\lambda^*(z) = \overline{\lambda(-\overline{z})}$$

で、それぞれ上、下半平面の上にうつすことができる（図 5.1 の上図はこの分割に対応する）。

これらの写像が共に境界まで連続にのばせることは次の定理からわかる。

定理 5.24 (カラテオドリの定理)　円弧か線分の有限和であるジョルダン閉曲線で囲まれた $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域 D のリーマン写像は D の閉包から単位円板の閉包上への同相写像（連続な全単射で逆写像も連続なもの）に拡張できる。

これはより一般なコンパクト化理論の特別な場合である。証明には 4 章で用いた長さ・面積法（補題 4.11 の証明法）を用いる。

[証明]　与えられた領域 D は有界であるとしてよい。また D のリーマン写像を $f(z)$ とする。まず、D の境界 C の任意の点 z_0 に対し、D 内から z_0 に収束する点列 $\{z_k\}$ を取ると、$\lim_{k\to\infty} f(z_k)$ は常に一定値であることを示そう。そうすれば、$f(z)$ は D の各境界点 z_0 で

$$f(z_0) = \lim_{D\ni z\to z_0} f(z)$$

と定めることで D の閉包上の連続関数が得られることは容易にわかる。逆写像についても以下と同じ論法で連続に拡張されることが示せ、それらの合成は恒等写像であるから主張を得る。

そのため、z_0 に収束する二つの点列 $\{z_k\}$ と $\{z'_k\}$ に対し、それらの極限 $w_1 = \lim_{k\to\infty} f(z_k)$ と $w_2 = \lim_{k\to\infty} f(z'_k)$ が定まりかつ異なるとする。このとき、w_1 と w_2 は単位円周上にある。$\delta_0 = |w_1 - w_2| > 0$ とおき、$\delta > 0$ を $\delta_0/3$ より十分小さく取って

$$D'_1 = \{|w - w_1| < \delta\} \cap \Delta, \quad D'_2 = \{|w - w_2| < \delta\} \cap \Delta$$

が共通点を持たない領域であるようにする。そのような δ を固定し、D'_j の 1 点 β_j を取る。また $\alpha_j = f^{-1}(\beta_j)$ とおく。さらに $r_0 > 0$ を十分小さく取り、$\{|z - z_0| < r_0\} \cap D$ は α_j を含まない領域であるとする。各 $w_k^1 = f(z_k)$ および $w_k^2 = f(z'_k)$ はそれぞれ D'_1 および D'_2 に属するとして

よいが、w_k^j を D'_j 内で順に折れ線で結んでいったものを L_j とする。その逆像を $\Gamma_j = f^{-1}(L_j)$ とするとき、Γ_1 は z_0 の近くで z_0 に向かう向きに関して Γ_2 の左側から z_0 に近づくとしてよい。

以上の準備の下に、$r < r_0$ として円周 $\{|z - z_0| = r\}$ が Γ_1 と最後に交わる点を $a(r) = z_0 + re^{i\alpha(r)}$、$\Gamma_2$ と最初に交わる点を $b(r) = z_0 + re^{i\beta(r)}$、その間の円弧を C_r とすると、

$$0 < \delta < |f(a(r)) - f(b(r))| \leq \int_{C_r} |f'(z)||dz| = \int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} |f'(z_0 + re^{i\theta})| r d\theta,$$

であるから、コーシー・シュヴァルツの不等式より

$$\delta^2 < 2\pi r \int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} |f'(z_0 + re^{i\theta})|^2 r d\theta$$

を得る。両辺を r で割り、$[\epsilon, r_0]$ 上で積分すると、

$$\delta^2 \log(r_0/\epsilon) < 2\pi \iint_D |f'(z)|^2 dxdy$$

である。右辺の積分は $f(D)$ の面積に等しいから、右辺は $2\pi^2$ より小さい。一方 $\epsilon \to 0$ のとき左辺は有界ではなく矛盾である。　　　　（証明終わり）

カラテオドリの定理から特に、モデュラー関数は $\hat{\mathbb{C}}$ 内での D_r の閉包から $H \cup \hat{\mathbb{R}}$ の上への同相写像に拡張できることがわかる。そこで、境界での正規化を行う。

要請　（拡張された）モデュラー関数は $0, 1, \infty$ を固定するものとする。

このとき、虚軸の上半分では定義よりモデュラー関数は（負の）実数値を取る。特に、$z = iy \quad (y > 0)$ なら

$$\lambda(z) = \overline{\lambda(-\overline{z})}$$

だから、虚軸の両側の「理想双曲３角タイル」D_r と D_l それぞれの等角写像 $\lambda(z)$ と $\lambda^*(z)$ が境界上の半直線（虚軸の上半分）で一致している（すなわち、「理想双曲３角タイル」D_r と D_l それぞれの像同士がうまく貼り合っている）ので、パンルベの定理から $\lambda(z)$ は T 上の正則関数と見なせる（ここで D_l および $\lambda^*(z)$ は、D_r 上の正則関数 $\lambda(z)$ に鏡映原理を適用したと

きの $R(D_r)$ および $R^* \circ \lambda \circ R(z)$ と一致する)。

さて、この T の等角写像 $\lambda(z)$ から出発して T の境界にある半円や半直線に関して鏡映原理を繰り返し使えば、$\Gamma(2)$ に関する T による H 全体のタイル貼りに対応する H 上の正則関数 $\lambda(z)$ で、任意の $g \in \Gamma(2)$ に対し恒等的に

$$\lambda(g(z)) = \lambda(z)$$

が成り立つものが得られる。これが本来の H 上の**モデュラー関数**である。

注意 このように、ある領域で与えられた正則関数をもっと広い領域まで正則に拡張してゆくことを一般に**解析接続**という。

ここでは鏡映変換により貼り合わせるべき関数を構成したが、他にも 4 章ですでに関数方程式を満たすことを用いて関数の定義域を広げていった。重要なことはこのような接続が一致の定理により一意的であることであり、正則関数の「剛性」と呼ばれる。すなわち、正則関数の自然な定義域(存在領域)は正則関数の断片が与えられれば自動的に決定するのであり、我々が恣意的に決められるものではない。(例えば対数関数が「多価」であるのは、我々の定義域の設定に問題があるというのが、リーマンの視点であった。)

モデュラー関数の存在は幾何学的には、次のようにも定式化できる。

定理 5.25 リーマン球面の部分領域 W_0 が 3 点からなる補集合を持てば、W_0 上に双曲計量が導入でき、W_0 は双曲多様体と見なせる。

[証明] $W_0 = \mathbb{C} - \{0, 1\}$ としてよいが、任意の点 $w \in W_0$ での重み $m(w)$ を、$w = \lambda(z)$ のとき、

$$m(w)|dw| = \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$$

すなわち

$$m(\lambda(z)) = \frac{1}{|\lambda'(z)| \operatorname{Im} z}$$

で定義すればよい。

ここで、この重み $m(w)$ が z の取りかたによらないことは、タイルの取

りかえが双曲計量で等長的な（すなわち、ピックの補題で等号が成り立つ）メビウス変換により行われることからわかる。　（証明終わり）

次にモデュラー関数を用いれば、リュービユの定理は次のように一般化できる。ただし証明としては、タイル貼りのイメージを前面に出した直観的な説明を与える[11]。

系 5.26 (ピカールの小定理)　二つの異なる値を取らない（像に含まない）整関数は定数関数に限る。

[証明]　整関数 $f(z)$ は非定数であるとし、0 と 1 とを取らない場合を考えれば十分である。このとき $\mathbb{C}$ の単連結性より、実軸の逆像 $f^{-1}(\mathbb{R})$ は複素平面をいくつかの領域に分ける。すなわちその補集合は高々可算個の単連結領域からなるがこれらの各々を「細胞」と呼ぶ。その一つ U を固定し、モデュラー関数の最初のタイル T への逆関数 $\lambda^{-1}(w)$ と合成して得られる U 上の正則関数 $\lambda^{-1}\circ f(z)$ を $F(z)$ と書く。

$f^{-1}(\mathbb{R})$ が空集合なら $F(z)$ は $\mathbb{C}$ 上定義できる。そうでないとすると、細胞 U の境界曲線が局所的に実軸のどの部分に $f(z)$ でうつされるかにより、U の隣の細胞がどの隣接タイルの $\lambda(z)$ による像に対応するかが決まっているから、パンルベの定理を繰り返し適用すれば、$F(z)$ を自然に U の境界を越えて順に全複素平面に解析接続できる。($f'(z)$ の N 位の零点 α が U の境界曲線上にあれば、α は $2N+2$ 個の細胞の境界曲線の共有点になっていて、それらの細胞が α の近傍を埋め尽くしている。)

この正則関数も $F(z)$ と書くことにすると $F(z)$ は $\mathbb{C}$ から上半平面への写像である。しかし上半平面は単位円板に等角写像できたから、リュービユの定理より $F(z)$ は定数関数でなければならず矛盾である。　（証明終わり）

またモンテルの定理も、モデュラー関数を用いれば次のように一般化できる。

定理 5.27 (3 点条件)　領域 D 上で $\{0,1\}$ を値に取らない正則関数のみからなる族は正規族である。

---

[11] 通常は局所的に定義された関数 $\lambda^{-1}\circ f(z)$ が全複素平面上の正則関数に解析接続できることを利用する。持ち上げ可能性定理（定理 6.1 ）を参照せよ。

[証明] D 上で正規族であることを示すには、D の各点中心の円板上でそうであることを示せばよい。そこではじめから、(単連結な) 円板からの写像の族であるとする。このとき上の証明と同様の手続きにより、仮定を満たす関数の族を（中心を T の閉包に対応する部分の点にうつすような）単位円板への写像の族と見なすことができるから、モンテルの定理より主張を示せる。（証明終わり）

系 5.28 リーマン球面から 3 点以上を除いた領域 D の正則自己写像からなる族は、正規族である。

注意 ピカールの小定理と 3 点条件とは、**ブロック原理**、すなわち整関数の退化性条件と関数族の正規性条件との相関原理の代表的な例である。もちろんリュービユの定理とモンテルの定理との間に見られるブロック原理が最も基本的なものである。

最後に応用として、等角写像列の極限に関する基本定理を示しておく。

定理 5.29 (カラテオドリの収束定理) 領域 D の補集合 $\hat{\mathbb{C}} - D$ が 3 点以上からなり、D からの等角写像 $f_k(z)$ の列が非定数関数 $f(z)$ に広義一様収束するなら、$f_k(D)$ は $f(D)$ に、任意の点 $w_0 \in f(D)$ に関して、**（基点付きの）カラテオドリ収束**[12]する。すなわち、

1. w_0 を含む領域で無限個の $f_k(D)$ に含まれるものは、常に $f(D)$ に含まれ、
2. コンパクト集合で $f(D)$ に含まれるものは、十分大きいすべての k に対し $f_k(D)$ に含まれる。

[証明] まずフルヴィッツの定理により $f(z)$ も等角写像である。任意に $f(D)$ の点 α を取り α から $\hat{\mathbb{C}} - f(D)$ までの距離を $\delta = \delta_\alpha$ として、α 中心で半径が $\delta/2$ の閉円板 B の逆像を $E = f^{-1}(B)$ とする。E の境界 C はジョルダン閉曲線である。仮定から、十分大きい K_α を選べば $k \geq K_\alpha$ なら C 上で $|f_k(z) - f(z)| \leq \delta/4$ であるとしてよい。したがってルーシェの定理により $f_k(E)$ は α 中心で半径が $\delta/4$ の円板 U_α を含むことがわかる。

---

[12] 1 章 3 節のハウスドルフ収束と比較せよ。

$f(D)$ に含まれる任意のコンパクト集合は、このような U_α $(\alpha \in f(D))$ の内の有限個で覆えるから、2. の主張が成り立つことがわかる。さらに逆関数の積分表示式（命題3.59）より、$z_k = f_k^{-1}(w_0)$ が $z_0 = f^{-1}(w_0)$ に収束することもわかる。

次に w_0 を含む領域 W で、無限個の k' に対し $f_{k'}(D)$ に含まれるものを任意に取る。このとき、各 $w = f_{k'}(z)$ の逆関数 $g_{k'}(w)$ が W 上で定義できるが、これらは D の中への等角写像である。したがって3点条件より $\{g_{k'}\}$ も正規族であるから（必要なら部分列に取りかえて）$g_{k'}(w)$ がある正則関数 $g(w)$ に W 上で広義一様収束するとしてよい。一方、

$$z_{k'}(= f_{k'}^{-1}(w_0)) = g_{k'}(w_0) \to z_0$$

より、$g(w_0) = z_0$ であるから、$g(w)$ は D 内の値を取る。したがって非定数であるから開写像定理より $g(W) \subset D$ となるが、さらに任意の $w \in W$ に対し $f \circ g(w) = w$ であることがわかる。実際、$z = g(w) \in D$ かつ $g_{k'}(w) \to g(w)$ であるので

$$|w - f \circ g(w)| \leq |f_{k'} \circ g_{k'}(w) - f \circ g_{k'}(w)| + |f \circ g_{k'}(w) - f \circ g(w)|$$

から主張を得る。特に

$$W = f(g(W)) \subset f(D)$$

すなわち 1. の主張を得る。（証明終わり）

課題　領域 D_k が領域 D_∞ に点 $w_0 \in D_\infty$ に関して（基点付きの）カラテオドリ収束するとき、D_∞ は、$\bigcap_{k=m}^{\infty} D_k$ の内点全体の集合を V_m として、

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$$

の z_0 を含む弧状連結成分（これを z_0 に関するカラテオドリ核という）であることを示せ。

5.5 カオスとしてのジュリア集合#

3点条件から、リーマン球面か複素平面から高々1点を除いた領域の自己正則写像のみが反復合成によりカオス部分集合を生成し得る。以下では簡単のためリーマン球面の自己正則写像、すなわち有理関数に限って考察する。

定義 有理関数 $R(z)$ が与えられたとき、その反復合成がいかなる開近傍ででも正規族にならないような点全体を $R(z)$ の**ジュリア集合**と呼び、J_R で表す。J_R の補集合を**ファトウ集合**といい、F_R で表す[13]。

上の定義は「有理関数 f の反復合成が同程度連続にならないような点全体の閉包」、すなわち、初期値に敏感な軌道を持つ点全体の閉包、と言いかえても良いのでジュリア集合はまさに $R(z)$ のカオス部分である。この事実を確認しよう。

以下では有理関数は常に2次以上である（定数関数でもメビウス変換でもない）とし、その次数（重複度を込めて数えた極の個数）を d で表すことにする。

課題 以下の主張を示せ[14]。

1. （超）吸引的周期点はファトウ集合に属する。
2. 反発的周期点はジュリア集合に属する。
3. 放物的周期点はジュリア集合に属する。
4. 中立的周期点は解析的線型化可能であるとき、かつそのときに限りファトウ集合に属する。

命題 5.30 (完全不変性) 有理関数 $R(z)$ のファトウ集合は完全不変な開集合である。すなわち

$$R(F_R) = F_R, \qquad R^{-1}(F_R) = F_R$$

が成り立つ。したがって、ジュリア集合は完全不変な閉集合である。

---

[13] 系 5.38 も見よ。

[14] 2. は定義から容易に示せる。1. と 4. は標準化を考えれば示せる。3. は花弁定理から従う。

[証明]　$z_0 \in F_R$ であることは $\{R^k(z)\}$ が z_0 のある近傍の各点で同程度連続であることと同値であるから F_R は開集合である。$R(z)$ が連続な開写像であることから、これはさらに $\{R^k(z)\}$ が $R(z_0)$ のある近傍の各点で同程度連続であることとも同値だから $R(z_0) \in F_R$ を得る。$R^{-1}(z_0) \subset F_R$ であることも、同様に示せる。

さらに $R(z)$ が $\hat{\mathbb{C}}$ の上への写像であることから、ジュリア集合も完全不変であることがわかる。　(証明終わり)

系 5.31　ジュリア集合 J_R が内点を持てば、$J_R = \hat{\mathbb{C}}$ である。

[証明]　J_R の内部に含まれる空でない円板 U を取ると、完全不変性から

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k(U) \subset J_R$$

である。一方、3点条件から左辺の補集合は高々2点で、その閉包はリーマン球面全体になるから主張を得る。　(証明終わり)

したがってジュリア集合は、リーマン球面全体でなければ内点を持たない。一方ジュリア集合がリーマン球面全体になる例もあるが、これは次節で与える。

課題　有理関数 $R(z)$ と任意の正の整数 N に対し

$$J_R = J_{R^N}$$

が成り立つことを示せ。

定理 5.32　有理関数のジュリア集合は空集合でなく、完全集合、すなわち孤立点を持たない閉集合である。

[証明]　閉集合であることはすでに示した。まず、ジュリア集合が空集合でないことを示そう。そのため、$R(z)$ の反復合成がリーマン球面の各点での近傍で正規族であれば、リーマン球面全体ででも正規族であるから、その部分列で $\hat{\mathbb{C}}$ 上一様収束するものが見つかる。これを $\{f_k(z) = R^{n_k}(z)\}$ とし、その極限を $h(z)$ とするとこれは定数値写像ではあり得ない。実際、$h(z)$ が $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ を値に持つ定数値写像であるとすると、$\{f_k(z)\}$ はリーマン球面上一

様に、1点 α に収束するから、十分大きい k に対しては $f_k(\hat{\mathbb{C}})$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 全体にはなり得ず仮定に反する。すなわち、$h(z)$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上で非定数の有理型函数、すなわち有理関数である。そこで $h(z)$ の次数を d_h とし、$n_K > d_h$ となる K を固定する。$\{R^{n_k - n_K}\}$ を考えれば、これも正規族だから部分列を取れば、やはり非定数の有理関数 $h_1(z)$ に収束するとしてよいが

$$R^{n_K}(h_1(z)) = h(z)$$

の両辺の次数を比べて矛盾を得る。

さて、J_R の任意の点 z_0 の任意の近傍 U を取るとき、3点条件から、

$$E(R) = \hat{\mathbb{C}} - \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k(U)$$

は高々2点であった。さらに定義より $R^{-1}(E(R)) \subset E(R)$ であるから、特に $E(R)$ の各点の $R^2(z)$ による逆像はそれ自身以外になく、$R^2(z)$ の固定点である。E が空集合でないときは、メビウス変換で共役を取れば、$E(R) = \{0, \infty\}$ あるいは $E(R) = \{\infty\}$ としてよいが、このとき、$R^2(z)$ は

$$R^2(z) = cz^{d^2}$$

あるいはそれ以外の d^2 次の多項式に限られる。特に $E(R)$ の各点は超吸引的固定点でファトウ集合に属する。

一方、z_0 の逆像が1点しかなければ、同様に $R(z)$ は多項式と共役で $z_0 \in F_R$ でなければならず仮定に反する。したがって、z_0 の逆像 $R^{-1}(z_0)$ は2点以上を含み、帰納的に $R^{-k}(z_0)$ は少なくとも 2^k 個の点を含むことがわかる。これは J_R の完全不変性より、J_R が無限個の点を、特に自分自身の集積点 z_0' を含むことを意味する。さらに前段より、$\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k(U)$ が J_R を含むから、z_0' を含む $R^k(U)$ が見つかるが、このとき U は z_0 以外の J_R の点を含む。U は任意だったから、J_R に孤立点はない。　（証明終わり）

次に、4章で与えたカオス性の定義を再記しておく。（そこにある脚注も参照せよ。）

定義　リーマン球面の閉部分集合 E の連続な自己写像 $f(z)$ が与える力学系が E 上（デバニーの意味で）**カオス的**であるとは以下の条件を満たすこ

とである。

1. $f(z)$ の E 内の周期点が E で稠密であり、
2. 位相的推移性を持ち、すなわち E との共通部分が空でない任意の開集合 U と V に対し、$f^k(U \cap E) \cap (V \cap E)$ が空でないような自然数 k があり、
3. 対初期値敏感性を持つ、すなわち、適当な正の定数 δ で、E の任意の点 z とその任意の近傍 U に対し $U \cap E$ の点 w と自然数 k を適当に取れば（球面距離に関し）

$$\rho(f^k(z), f^k(w)) > \delta$$

が成り立つものがある。

定理 5.33 (カオス性)　有理関数はそのジュリア集合上でカオス的である。

この定理は以下の三つの事実からわかる。

まず反発的周期点はジュリア集合に入るが、それ以外の周期点は有限個しかない。実際、その個数は次のように評価できる。証明については、エプシュタインによるものを 6 章で概説する。

定理 5.34 (ファトウ・宍倉の評価式)　次数 d の有理関数 の（超）吸引的周期点系と中立的周期点系の個数の和は $2d-2$ を越えない。ただし周期点に対し、その軌道（有限集合）を **周期点系**と呼ぶ。

したがって、周期点の稠密性より強く、次の定理が成り立つ。

定理 5.35 (第一基本定理)　有理関数 $R(z)$ の反発的周期点全体は、そのジュリア集合 J_R 内で稠密である。

[証明]　そうでないとすると、J_R の点 z_0 とその単連結な近傍 U で $U - \{z_0\}$ が $R(z)$ の周期点をまったく含まないものがある。必要なら z_0 を取りかえて、さらに z_0 は周期点でなく、U が $R(\infty)$ も分岐点（$R(z)$ が局所的に等角写像でない点）の像（分岐値）も含まないとしてよい。

このとき、R の異なる逆関数が十分小さい U 上では少なくとも二つ定義できるが、それらを $h_1(z)$ および $h_2(z)$ とする。ここでさらに U を小さく

取りかえて

$$\infty \notin h_1(U), \qquad \infty \notin h_2(U),$$

$$h_1(U) \cap U = h_2(U) \cap U = h_1(U) \cap h_2(U) = \emptyset$$

としてよい。そこで、任意の k に対し

$$F_k(z) = (h_1(z), h_2(z), R^k(z), z) = \frac{R^k(z) - h_1(z)}{R^k(z) - h_2(z)} \cdot \frac{z - h_2(z)}{z - h_1(z)}$$

とおけば、仮定より各 $F_k(z)$ は $0, 1, \infty$ を値に取らない。したがって $\{F_k(z)\}$ は U 上正規族をなす。しかし、これは $\{R^k(z)\}$ も U 上正規族であることを意味し、U が J_R の点 z_0 を含むことに矛盾する。（証明終わり）

次に位相的推移性は、次の命題から容易に示せる。

命題 5.36 (擬似自己相似性) 有理関数 $R(z)$ のジュリア集合 J_R の任意の点 z_0 と、その任意の近傍 U に対し

$$R^K(U) \supset J_R$$

となる自然数 K がある。

[証明] ジュリア集合 J_R の任意の点 z_0 と、その任意の近傍 U に対し

$$E(R) = \hat{\mathbb{C}} - \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k(U)$$

は高々 2 点からなり $E(R)$ の各点はファトウ集合に属していた。J_R はコンパクト集合だから、

$$\bigcup_{k=1}^{M} R^k(U) \supset J_R$$

を満たす M が見つかることがわかる。

さらに U 内に反発的周期点 z_0 が見つかるが、その周期を q とする。z_0 の近傍 $V(\subset U)$ を十分小さく取れば、

$$V \subset R^q(V) \subset R^{2q}(V) \subset \cdots$$

が成り立つ。さらに $J_R = J_{R^q}$ だから前段より $R^{qM}(V) \supset J_R$ となる M が取れる。$K = qM$ とすれば主張を得る。　（証明終わり）

この擬似自己相似性から位相的推移性がわかり、対初期値敏感性は、次の命題より一般に従うのでカオス性の証明が終わる。

命題 5.37　リーマン球面の連続な自己写像 $F(z)$ が無限個の点を含む閉集合 E を不変にし、かつその周期点が E で稠密で E 上位相的推移性を持つならば、$F(z)$ は E 上で対初期値敏感性を持つ。

[証明]　E 内に共通点を持たない軌道を持つ $F(z)$ の周期点 z_1 と z_2 を取り、その軌道の間の球面距離を $\delta_0 > 0$ とする。このとき、$\delta = \delta_0/8$ とおけばよいことを示そう。

そのため E の任意の点 w とその近傍 V が与えられたとし、

$$U = V \cap \{z \in E \mid \rho(z, w) < \delta\}$$

とする。仮定より U は周期点を含むから、その一つを z_3 とし、その周期を K とする。また仮定より z_1 と z_2 の軌道のどちらか一方、例えば z_1 の軌道が w と 4δ 以上離れているとしてよい。

一方で、

$$W = \bigcap_{j=0}^{K} F^{-j}(\{z \in E \mid \rho(F^j(z_1), z) < \delta\})$$

とすれば、これは開集合で、z_1 を含むから空ではない。したがって推移性より、$F^k(w_1) \in W$ を満たす $w_1 \in U$ と k が取れる。ここで、$J = [k/K] + 1$ とおけば、$KJ - k \leq K$ より

$$F^{KJ}(w_1) \in \{z \in E \mid \rho(F^{KJ-k}(z_1), z) < \delta\}$$

を満たすが、$F^{KJ}(z_3) = z_3$ より、

$$\begin{aligned}\rho(F^{KJ}(z_3), F^{KJ}(w_1)) &\geq \rho(w, F^{KJ-k}(z_1)) \\ &-\rho(F^{KJ-k}(z_1), F^{KJ}(w_1)) - \rho(z_3, w) > 2\delta\end{aligned}$$

を得る。したがって、$\rho(F^{KJ}(w), F^{KJ}(w_1))$ か $\rho(F^{KJ}(z_3), F^{KJ}(w))$ かのいずれかは δ より大きい。　（証明終わり）

以上でカオス性の証明が終わったが、最後に次の主張もわかる。

系 5.38 この節で定義したジュリア集合は、多項式 $P(z)$ の場合には充填ジュリア集合 K_P 、すなわち $P(z)$ による軌道が有界な複素平面上の点全体、の境界と一致する。

[証明] まず 2 次式の場合と同様の議論で、K_P の（$\mathbb{C}$ での）補集合は無限遠点への発散点集合 F_P と一致することが証明できる。

定義より $P^k(z)$ は K_P の内部では有界で、F_P 上でも K_P の値を取らないので、正規族である。すなわち、J_P は K_P の境界に含まれる。

一方、もし K_P の境界のある点が J_P に属さないとすれば、その適当な近傍 U を取れば $\{P^k(z)\}$ は U 上で正規族になる。そこで、広義一様収束する部分列を取ると極限は U 上の有理型関数であるが、F_P との共通部分では無限遠点に収束し、K_P との共通部分では有界である。これは不可能だから K_P の境界が J_P に含まれることが示せた。（証明終わり）

5.6 楕円関数とカオス *

この節では、ジュリア集合がリーマン球面全体になる（すなわち、ファトウ集合が空集合になる）ことが実際生じる例を与える。そのために、二重周期を持つ有理型関数（楕円関数）として代表的なヴァイエルシュトラスのペー関数 $\wp(z)$ を定義しよう。

定義 0 でない複素数 ω_1 と ω_2 で $\mathrm{Im}\,(\omega_2/\omega_1) > 0$ を満たすものに対し、

$$\Omega = \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

とおくとき、

$$\wp(z) = \wp(z, \Omega) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega, \neq 0} \left\{ \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\}$$

をヴァイエルシュトラスのペー関数という。

命題 5.39

1. 級数 $\wp(z)$ は複素平面上で絶対収束かつ広義一様収束し[15]、二重周期 ω_1 と ω_2 を持つ（すなわち格子点集合 Ω の任意の元 ω に対し
$$\wp(z+\omega)=\wp(z)$$
が任意の $z\in\mathbb{C}$ で成り立つ）有理型な偶関数で、Ω の各点のみで2位の極を持つ。

2. $\wp(z)$ は、微分方程式
$$\wp'(z)^2=4\wp(z)^3-g_2\wp(z)-g_3$$
を満たす。ここで、g_2 と g_3 は Ω にのみ依存する定数である。

3. $4x^3-g_2x-g_3=0$ の3解を e_1,e_2,e_3 とすれば、これらは相異なる $\wp'(z)$ の零点で
$$e_1=\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right),\quad e_2=\wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right),\quad e_3=\wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$$
である。

[証明]

1. 任意の N に対し
$$\Omega_N=\{n\omega_1+m\omega_2 \mid \max\{|n|,|m|\}=N\}$$

とおくと、Ω_N は $8N$ 個の元からなり、これら全体は Ω を尽くす。また、原点と Ω_1 を含む平行4辺形の周との距離を $\delta>0$ とすれば、原点と Ω_N との距離は $N\delta$ より小さくない。

したがって $|z|<N\delta/2$ かつ $\omega\in\Omega-\bigcup_{k=0}^{N}\Omega_k$ ならば
$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right|\leq\frac{(N\delta/2)(2|\omega|+N\delta/2)}{(|\omega|-N\delta/2)^2|\omega|^2}\leq 5N\delta\,\frac{1}{|\omega|^3}$$
が成り立つ。したがって、$\{|z|<N\delta/2\}$ 上一様に

[15] この節では簡単のため常に、各点で適当な有限個の項を除いた残りの級数が絶対収束するとき、もとの級数が絶対収束する、と言うことにする。同様に、ある級数が領域 D 上広義一様収束するとは、D に含まれる任意のコンパクト集合 E に対し、適当に有限個の項を除けば残った級数が E 上一様収束することとする。

$$\sum_{\omega\in\Omega-\cup_{k=0}^{N}\Omega_k}\left|\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right|\leq\sum_{k=N}^{\infty}5N\delta\frac{8k}{(k\delta)^3}<\infty$$

が成り立つ。すなわちペー関数は複素平面上で絶対収束かつ広義一様収束し、各 $\omega\in\Omega$ で2位の極を持つ。また項別微分ができるから

$$\wp'(z)=-2\sum_{\omega\in\Omega}\frac{1}{(z-\omega)^3}$$

である。特に $\wp'(z)$ は Ω の各元を周期とする二重周期関数である。Ω の元以外に周期がないことは、やはり極がそれ以外にないことからわかる。

次に、

$$\wp(-z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\in\Omega,\neq0}\left\{\frac{1}{(z-(-\omega))^2}-\frac{1}{(-\omega)^2}\right\}=\wp(z)$$

より、$\wp(z)$ は偶関数である。一方上述より

$$\wp(z+\omega_j)=\wp(z)+C_j$$

と書けるが、$z=-\omega_j/2$ を代入すれば $C_j=0$ がわかる。すなわち、$\wp(z)$ も Ω の各元を周期とする二重周期関数である。それ以外に周期がないことは、やはり極が Ω の元以外にないことからわかる。

2. $\wp(z)$ のローラン展開を

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+c_2z^2+c_4z^4+\cdots$$

とすると、

$$\wp'(z)^2=\left(\frac{-2}{z^3}+2c_2z+4c_4z^3+\cdots\right)^2=\frac{4}{z^6}-\frac{8c_2}{z^2}-16c_4+\cdots$$

となる。したがって

$$\wp'(z)^2-4\wp(z)^3+20c_2\wp(z)+28c_4$$

は、原点で 0 になり、複素平面上正則で、Ω の各元を周期に持つことがわかる。特に有界になるからリュービユの定理より定数 0 である。すなわち、求める微分方程式を得た。

3. $\wp'(z)$ の零点は、この関数が奇関数であることから、

$$\{\omega/2 \mid \omega \in \Omega\}$$

にあることがわかる。それ以外にないことは、$\wp'(z)$ の極が（群としての）Ω に関する適当な「タイル」（極や零点を通らず ω_1 あるいは ω_2 に平行な辺を持つ閉平行4辺形の内部）の中に3個（Ω の点に3位の極）しかなく、零点がすでに3個見つかっているので、偏角原理からわかる。実際「タイル」の向かい合う辺は $\pm\omega_j$ だけの平行移動でうつり合う。したがって向かい合う辺で

$$\frac{\wp''(z)}{2\pi i \wp'(z)}$$

は同じ値を取るので「タイル」の周に沿う積分は0になるが、一方でその値は「タイル」内の零点の重複度込みの個数から極の重複度込みの個数を引いたものに等しい。

さらに、e_j の値が異なることは、やはり同様に「タイル」上ですべての値が3回しか取られないことからわかる。実際、すべての e_j は $\wp(z)$ により2回重複して取られている値なので一致し得ない。　（証明終わり）

一方 $\wp(z)$ は因数分解の形に表すこともできる。そのために、まず $\wp(z)$ の原始関数を考える。

補題 5.40　関数

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Omega, \neq 0} \left\{ \frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right\}$$

は複素平面上で絶対収束かつ広義一様収束し、有理型で奇関数である。さらに

$$\wp(z) = -\zeta'(z)$$

が成り立つ。特に、

$$\zeta(z+\omega_j) = \zeta(z) + \eta_j$$

を満たす定数 η_j がある。

[証明]　前半の主張は命題 5.39 の 1. の証明での議論と同様にして示せる。さらに項別微分すれば、後半の主張を得る。（証明終わり）

なお収束性の証明での議論で、一般に次の定理が示せる。

定理 5.41 (全複素平面の場合のミッターク - レフラーの定理)　複素平面上の孤立点集合 $E = \{\alpha_k\}$ の各点で「主要部」として有理式

$$R_k(z) = \sum_{j=1}^{J_k} \frac{a_{k,j}}{(z-\alpha_k)^j}$$

が与えられたとする。$R_k(z)$ の原点でのテーラー展開の有限和 $P_k(z)$ で $\{|z| < |\alpha_k|/2\}$ 上で

$$|R_k(z) - P_k(z)| \le 2^{-k}$$

を満たすものに対し、

$$f(z) = \sum_k (R_k(z) - P_k(z))$$

は複素平面上絶対収束かつ広義一様収束する。この $f(z)$ は E の各点でのみ極を持つ有理型関数で、各 α_k での主要部は $R_k(z)$ となる。

補題 5.40 の関数 $\zeta(z)$ は二重周期関数ではないが、「タイル」上に唯一の 1 位の極を持つので、基本的な関数である。同様にその対応物として、「タイル」上に零点をただ一つ持つ正則関数が構成できる。

補題 5.42　関数

$$\sigma(z) = z \prod_{\omega\in\Omega,\neq 0} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right)$$

は複素平面上絶対収束かつ広義一様収束し、

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$$

を満たす正則な奇関数である。特に

$$\sigma(z+\omega_j) = -e^{\eta_j z + (\eta_j \omega_j/2)}\, \sigma(z)$$

を満たす。さらに

$$\wp(z)-\wp(w)=-\frac{\sigma(z-w)\sigma(z+w)}{\sigma(z)^2\sigma(w)^2}$$

が成り立つ。

[証明]　対数を考え、$\{|z|<N\delta/2\}$ 上で

$$\sum_{\omega\in\Omega-\bigcup_{k=0}^{N}\Omega_k}\left(\log\left(1-\frac{z}{\omega}\right)+\frac{z}{\omega}+\frac{z^2}{2\omega^2}\right)$$

が（適当な $\log z$ の分枝を取るとき）絶対収束かつ一様収束することを示せばよいが、これも以前と同様に証明できる。したがって、この無限積は複素平面上絶対収束かつ広義一様収束することがわかる。関数 $\zeta(z)$ との関数等式は対数微分すれば得られる。したがって特に

$$\sigma(z+\omega_j)=C_je^{\eta_jz}\sigma(z)$$

であるが、$z=-\omega_j/2$ を代入すれば求める C_j の値が得られる。

次に $w\neq z$ として、最後の式の右辺が z に関して二重周期関数であることは、この周期に関する加法公式からわかるが、さらに原点で2位の極を $z=\pm w$ で1位の零点を持つ。したがってリュービユの定理より、z の関数として $\wp(z)-\wp(w)$ の定数倍と一致することがわかるが、一方原点でのローラン展開の主要部を比べれば、

$$\wp(z)-\wp(w)=-\frac{\sigma(z-w)\sigma(z+w)}{\sigma(z)^2\sigma(w)^2}$$

である。　　　　（証明終わり）

同様の議論で、次の存在定理が得られる。

定理 5.43 (全複素平面の場合のヴァイエルシュトラスの無限積表示)　複素平面上の 0 を含まない孤立点集合 $E=\{\alpha_k\}$ が与えられたとする。E の各点 α_k に対し

$$\log\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)$$

の原点でのテーラー展開の有限和 $P_k(z)$ で $\{|z| < |\alpha_k|/2\}$ 上で

$$\left|\log\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) - P_k(z)\right| \le 2^{-k}$$

を満たすものに対し、

$$f(z) = \prod_k \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{-P_k(z)}$$

は複素平面上絶対収束かつ広義一様収束する。この $f(z)$ は E の各点でのみ 1 位の零点を持つ整関数である。

定理 5.44 (ペー関数の加法定理)

$$\wp(z+w) + \wp(z) + \wp(w) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right)^2$$

が成り立つ。特に**ペー関数の 2 倍公式**：

$$\wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2$$

が成り立つ。

[証明]　補題 5.42 の最後にある等式の両辺を z について対数微分すれば

$$\begin{aligned}\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(w)} &= \frac{\sigma'(z-w)}{\sigma(z-w)} + \frac{\sigma'(z+w)}{\sigma(z+w)} - 2\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} \\ &= \zeta(z-w) + \zeta(z+w) - 2\zeta(z)\end{aligned}$$

だから、

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right\} = \zeta(z+w) - \zeta(z) - \zeta(w)$$

を得る。この両辺を再度 z と w に関して微分し、$\wp(z) = -\zeta'(z)$ と

$$\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - \frac{g_2}{2}$$

を代入すれば、求める等式を得る。　(証明終わり)

例 5.5 (ラッテの例)　$\omega_1 = 1$ かつ $\omega_2 = i$ の場合には、$c = g_2/4$ とすれば

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)(\wp(z)^2 - c)$$

が成り立つ（これは $\wp(iz) = -\wp(z)$ からわかる）。このとき2倍公式は

$$\wp(2z) = \frac{(\wp(z)^2 + c)^2}{4\wp(z)(\wp(z)^2 - c)}$$

の形になる。この事実から、

$$R(z) = \frac{(z^2+1)^2}{4z(z^2-1)}$$

のジュリア集合がリーマン球面全体になることが示せる。

実際、$S(z) = c^{-1/2}z$ とし、

$$X = \left\{ \frac{\omega}{2^k - 1} \mid k \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega \right\}$$

とおくと、X は複素平面上稠密である。したがって、$S \circ \wp(z)$ による像も稠密である。一方、

$$R^k(S \circ \wp(z)) = S \circ \wp(2^k z)$$

で $z = \omega/(2^k - 1)$ $(\omega \in \Omega)$ の形なら、右辺は $S \circ \wp(z)$ に等しい。すなわち、$S \circ \wp(X)$ の各点は $R(z)$ の周期点で、反発的であることも定義から明らかである。したがって、

$$\hat{\mathbb{C}} = \overline{X} \subset J_R$$

を得る。

5.7　結び目とカオス $^{\#}$

この節では、メビウス変換からなる離散群でリーマン球面上カオス的な作用をするものとして、次の例を概説しておく。

例 5.6 (カオス的なメビウス変換群)　二つのメビウス変換

$$S(z) = z + 1, \qquad T(z) = \frac{z}{-\omega z + 1} \qquad \left(\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$$

が生成する群 G の極限集合はリーマン球面全体になる。

この例ではリーマン球面上にはタイルを見つけられない。しかし、双曲空間を考えれば、その中で適当な3次元タイルが見つけられて、いわゆる「8の字結び目」の補空間に双曲構造を与える。

定義　双曲空間 $\mathbb{H}^3$ とは、3次元の実単位開球

$$\Delta_3 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|^2 + |y|^2 + |t|^2 < 1\}$$

に、双曲計量

$$ds^2 = 4\frac{dx^2 + dy^2 + dt^2}{(1 - x^2 - y^2 - t^2)^2}$$

を導入した（すなわち曲線 C の長さを $\int_C ds$ で定義した）空間である。

ここで、Δ_3 の含まれる空間を4次元空間

$$\mathbb{R}^4 = \{(x, y, t, s) \mid x, y, t, s \in \mathbb{R}\}$$

内の xyt-平面と考え、その単位球面

$$S^3 = \{|x|^2 + |y|^2 + |t|^2 + |s|^2 = 1\}$$

の「北極点」$(0, 0, 0, 1)$ からの立体射影を以前と同様に考えると、S^3 は xyt-平面に無限遠点を付け加えたもの $\hat{\mathbb{R}}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ と同一視でき、3次元球面距離が $\hat{\mathbb{R}}^3$ 上で定義できる。このとき、Δ_3 は S^3 の下半球面にうつり、$\mathbb{R}^4$ の原点中心の回転で $\{t > 0\}$ に含まれる S^3 の半球面、さらにそれと同一視される $\mathbb{R}^3$ の半空間、にうつされる。その際に双曲計量の変化を計算すれば、双曲平面の場合と同様に $\mathbb{H}^3$ は上半空間

$$H^3 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t > 0\}$$

に双曲計量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dt^2}{t^2}$$

を導入したものと同一視できることがわかる。

一方、メビウス変換は円周に関する鏡映変換の合成で書けたが、円周に関する鏡映変換は自然に3次元空間の球面に関する鏡映変換に拡張できる。

定義　メビウス変換の**ポアンカレ拡張**とは、その変換を円周に関する鏡映変換の合成として表すとき、その各々の円周に関する鏡映変換を、(リーマン球面を

$$\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t = 0\} \cup \{\infty\}$$

と同一視することにより）それぞれ3次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内でその円周を大円とする球面に関する鏡映変換に拡張し、それらの合成を考えることによって、H^3 の同相写像に拡張したものである。

例 5.7　幾何学的な考察から、$S(z)$ のポアンカレ拡張は平面

$$S_1 = \{(x, y, t) \in H^3 \mid (x + 1 + iy)/(\omega + 1) \in \mathbb{R}\}$$

を平面

$$S_2 = \{(x, y, t) \in H^3 \mid (x + iy)/(\omega + 1) \in \mathbb{R}\}$$

に平行移動し、$T(z)$ のポアンカレ拡張は実軸上に鉛直に立つ半平面 S_3 より y 成分が大きい点からなる半空間を、$0, \omega, \omega + 1$ を通る円周を大円に持つ半球面 S_4 の内部にうつす。

さらに、

$$V(z) = T \circ S^{-1} \circ T^{-1} \circ S(z)$$

のポアンカレ拡張は $0, -1, \omega$ を通る円周を大円に持つ半球面 S_5 の外部を、$\omega, \omega + 1$ を通る直線上に鉛直に立つ半平面 S_6 より y 成分が大きい点からなる半空間にうつす。(ただし、V は斜航的元であり、

$$V(\omega) = \omega + 1, \quad V(0) = \infty, \quad V(-1) = \omega$$

で定まる。)

一方直接計算で、次の定理を証明できる。

定理 5.45　メビウス変換のポアンカレ拡張全体は、3次元双曲空間の向きを保つ合同変換全体と一致する。

このとき $\mathbb{H}^3$ では、$S(z), T(z), V(z)$ のポアンカレ拡張を貼り合わせ変換として持つ（それらで生成される群 G に対する）3次元双曲タイルがあり、例えば六つの半平面あるいは半球面 $S_1, \cdots, S_6$ で囲まれた $\mathbb{H}^3$ 内の領域 D が取れる。(双曲空間での D は6面体で[16]、その双曲体積は有限である。)

それぞれの境界面には D の G の元による像が貼り合ってゆき、かつ、その任意の異なる無限列の（3次元球面距離に関する）直径が0に収束することも以前と同様にわかる。したがって、次の定理を得る。

定理 5.46　3次元双曲タイル D により、群 G に関する双曲空間のタイル貼りができる。

3次元双曲タイルの軌道からなる任意の無限列に対し、3次元球面距離に関する直径が常に0に収束することから、さらに次の主張を得る。

系 5.47　群 G の元の固定点はリーマン球面上稠密である。

[証明]　まず、タイルのすべての頂点は放物型元の固定点である。双曲タイルの任意の無限列の直径が0に収束するので、放物型元の固定点はリーマン球面で稠密になり、主張を得る。（証明終わり）

また、タイル貼りができることから次の主張がわかる。

系 5.48　$T(z)$ と $S(z)$ で生成される群 G は $\mathbb{H}^3$ 上で**真性不連続**である。特に、恒等変換に収束するような G の元の列はない。

[証明]　実際、恒等変換に収束するような G の元の列があれば、それらによる3次元双曲タイルの像は双曲空間内で集積しなければならない。

（証明終わり）

定義　メビウス変換（のポアンカレ拡張）で生成され $\mathbb{H}^3$ 上で真性不連続な群 G を**クライン群**という。

このとき、H^3 の1点 p_0 の G による軌道 $G(p_0)$ の $\hat{\mathbb{R}}^3$ での集積点全体の集合は p_0 の取りかたによらない（2章も参照せよ）。そこでこの $\hat{\mathbb{C}}$ 内の

---

[16] この6面を貼り合わせ変換で貼り合わせると、位相的には、いわゆる8の字結び目の補集合であることがわかる。

集合をクライン群 G の**極限集合**と呼び $\Lambda(G)$ で表わす。このときやはり $\Lambda(G)$ は G の各元で不変で、さらに $\Lambda(G)$ の各点のいかなる $\hat{\mathbb{C}}$ 内の近傍上でも G は正規族（同程度連続）ではない。$\Lambda(G)$ が G の非楕円型元の固定点をすべて含むことも２章での議論と同様である。

定義　クライン群 G が極限集合 $\Lambda(G)$ 上**カオス的**であるとは、以下の条件を満たすもことととする。

1. G の恒等変換以外の元の $\Lambda(G)$ 内の固定点が $\Lambda(G)$ で稠密であり、
2. 位相的推移性を持ち、すなわち $\Lambda(G)$ との共通部分が空でない任意の開集合 U と V に対し、$g(U \cap \Lambda(G)) \cap (V \cap \Lambda(G))$ が空でないような元 $g \in G$ があり、
3. 対初期値敏感性を持つ、すなわち適当な正の定数 δ で、$\Lambda(G)$ の任意の点 z とその任意の近傍 U に対し、U の点 w と元 $g \in G$ を適当に取れば（球面距離に関し）

$$\rho(g(z), g(w)) > \delta$$

が成り立つものが取れる。

命題 5.49　極限集合 $\Lambda(G)$ が３点以上を含むクライン群 G に対し、$\Lambda(G)$ は孤立点を持たず、かつ G は $\Lambda(G)$ 上でカオス的である。

[証明]　極限集合が３点以上を含むことから、$\Lambda(G)$ の各点は $\Lambda(G)$ の１点の軌道の集積点であることがわかるので孤立点は含まない。

次に、G は非楕円型元 $h_1(z)$ を含む（章末の演習問題 17 ）が、２章末の演習問題 13 と仮定から、さらに $h_1(z)$ と固定点を共有しない非楕円型元 $h_2(z)$ があることがわかる。したがって、G の非楕円型元の固定点も３点以上になるから、前段と同じ議論でそのような固定点の稠密性が示せる。

位相的推移性を得るには、$\Lambda(G)$ との共通部分が空でない任意の開集合 U に対し、G の有限個の元 $\{g_k(z)\}_{k=1}^{K}$ で $\bigcup_{k=1}^{K} g_k(U) \supset \Lambda(G)$ を満たすものを見つければ十分である。まず非楕円型元の固定点の稠密性から U 内には G の非楕円型元 $g(z)$ の反発的あるいは放物的な固定点 α_g がある。したがって、$\hat{\mathbb{C}} - \bigcup_{k=0}^{\infty} g^k(U)$ は空集合であるか、$g(z)$ の吸引的固定点（があれば、その）１点のみからなる。後者の場合には、さらに g と固定点を共有し

ない G の非楕円型元 $h(z)$ を取ると、2 章 3 節でのシュタイナー円周族のうつりかたを考慮すれば、$h(z)$ の固定点集合 F_h を含む $g^K(U)$ がある。このとき $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} h^k(g^K(U)) = \hat{\mathbb{C}}$ であるから主張を得る。

最後に初期値敏感性は、上述の元 $g(z)$ と $h(z)$ それぞれの固定点集合 F_g と F_h の間の球面距離を δ_0 とおくと、$\delta = \delta_0/2$ で成り立つ。実際、任意の z とその近傍 U が与えられたとすると、前段の議論で $f(U)$ が F_g を含むような $f(z) \in G$ が見つけられる。このときこのとき絶対値が十分大きい k を取れば $g^k(f(U)) \supset F_g \cup F_h$ であるから主張を得る。　（証明終わり）

5.8 ファトウ集合についての基本定理

有理型関数 $R(z)$ のファトウ集合 F_R は高々可算個の領域からなる。完全不変性から、$R(z)$ は F_R の各点をまたファトウ集合にうつし、さらに F_R の各弧状連結成分をやはり弧状連結成分の上にうつすが、ひとたび同じ領域にうつれば、それからはそれまでにうつった領域を繰り返したどる。

定義　ファトウ集合 F_R の弧状連結成分 D が**周期成分**であるとは、

$$R^k(D) = D$$

となる正の整数 k があることである。ある像 $R^j(D)$ $(j > 0)$ が周期成分であるとき、D を**前周期的**であるという[17]。さらに D が前周期的でない、すなわち、任意の異なる非負の整数 k, j に対して $R^k(D) \neq R^j(D)$ であるとき、D を**遊走領域**と呼ぶ。

このとき、次の定理はダンジョワ・ウォルフの定理の変形であるが、有理関数が与える力学系でのファトウ集合の周期成分の完全な分類を与えている。

定理 5.50 (周期成分の分類定理)　有理関数の周期成分 D は以下のいずれかを満たす。

1. （超）吸引的周期点を含む。

---

[17] 通常、周期成分は前周期的成分には含まれない。

2. その閉包に放物的周期点を含む。
3. 中立的周期点を含む。このとき、$\{R^k(z)\}$ の部分列で恒等変換に D 上広義一様収束するものがある。
4. 二重連結で、$\{R^k(z)\}$ の部分列で恒等変換に D 上広義一様収束するものがある。

[証明]　必要なら適当な $R^N(z)$ を考えて、$R(D) \subset D$ としてよいが、このとき、ダンジョワ・ウォルフの定理の証明と同じ議論で証明できる。以下その概略を述べる。

まず次章で解説するように、補集合が3点以上あるリーマン球面上のすべての領域 D には双曲距離が定義できる。さらにピックの補題より、$R(z)$ は D 上の双曲距離に関して広義の縮小写像であることもわかる。

そこで、任意の $z \in D$ に対し、$R^k(z)$ が D から散逸する（D の境界に向かう）とする。ここで一般の D に対しても、双曲距離に関する直径が有界な D の部分集合が境界に向かうとき、その球面距離に関する直径は0に収束する。実際、双曲計量の包含関係に関する単調性と、定理 5.25 で構成した $\mathbb{C} - \{0,1\}$ 上の双曲計量 $m(w)$ の原点付近での評価式

$$m(w) \geq \frac{c}{|w| \log(1/|w|)} \qquad (c > 0)$$

を用いて証明できる。したがって、ダンジョワ・ウォルフの定理の証明での議論と同様に（しかしより容易に）、D の境界上に $R(z)$ の固定点があり、$R^k(z)$ が D 上広義一様にその点に収束することが示せる。これが放物的固定点であること、すなわち 2. の場合が成り立つこと、は次に述べる蝸牛補題からわかる。

次に、今度は D から散逸しないとする。さらに D の各点で双曲距離に関して $R(z)$ が真に縮小写像であるとすると、ダンジョワ・ウォルフの定理の証明と同様に 1. の場合が生じることが証明できる。

一方そうでないとすると、次章で述べる D の普遍被覆面としての単位円板 Δ と Δ から D への普遍被覆射影 π を用いれば、各 k に対し Δ の正則自己写像 $T_k(z)$ で、

$$\pi \circ T_k(z) = R^k \circ \pi(z)$$

を満たす関数が構成できる（定理 6.1)。仮定から各 $T_k(z)$ は $\text{Möb}(\Delta)$ の元である。

ここで、$R(z)$ が位数有限でないから、各 $T_k(z)$ もそうではない。また、D の 1 点 z_0 の軌道 $\{R^k(z_0)\}$ が D の 1 点に集積するという仮定から、$\{T_k(z)\}$ の部分列 $\{T_{k'}(z)\}$ で $\text{Möb}(\Delta)$ の元 $T(z)$ に Δ 上広義一様収束するものが取れるとしてよい。さらに、D の普遍被覆変換群を G_D $(\subset \text{Möb}(\Delta))$ とすれば、任意の G_D の元 $g(z)$ に対して

$$\pi \circ T_k(z) = R^k \circ \pi(z) = R^k \circ \pi(g(z)) = \pi \circ T_k(g(z))$$

だから、$T_k \circ g \circ T_k^{-1} \in G_D$ である。したがって G_D が真性不連続であることから、十分大きい k' について $T \circ T_{k'}^{-1}(z)$ は、$g(z)$ と可換でなければならない。特に、G_D 自身が可換群であることがわかる。このような普遍被覆変換群を持つ平面領域で双曲計量が導入できるものは、単位円板 Δ、$\Delta - \{0\}$、円環のいずれかに双正則同値になる（6 章末の演習問題 4 ）が、ジュリア集合は孤立点を持たないから $\Delta - \{0\}$ ではあり得ず、3., 4. のいずれかの場合のみが生じることもわかる。（証明終わり）

補題 5.51 (蝸牛補題) $R(z)$ の周期成分 D に対し、$R(D) = D$ かつ $R^k(z)$ が境界点 ζ に D 上広義一様収束するとき、ζ は放物的固定点である。

[証明] まず、ζ はジュリア集合の点で D の境界点でもあるから中立的固定点である。そこで、無理中立的であるとして矛盾を示そう。$w \in D$ および、w と $R(w)$ を含む単連結領域 U で閉包が D に含まれるものを固定する。$R(z)$ は ζ の近傍で単射だから、各 $R^k(z)$ も U 上で単射であるとしてよい。そこで、

$$F_k(z) = (R^k(z), R^k(w), \zeta, \infty) = \frac{R^k(z) - \zeta}{R^k(w) - \zeta}$$

として、さらに単位円板 Δ から U 上への等角写像 $g(z)$ で、$g(0) = w$ を満たすものを固定する。このとき、

$$h_k(z) = F_k(g(z)) - 1$$

は Δ 上の単葉関数で $h_k(0) = 0$ を満たし、$h_k(\Delta)$ は -1 を含まない。したがってケーベの 1/4 定理より $|h_k'(0)| \leq 4$ であるから、ケーベの歪曲定理よ

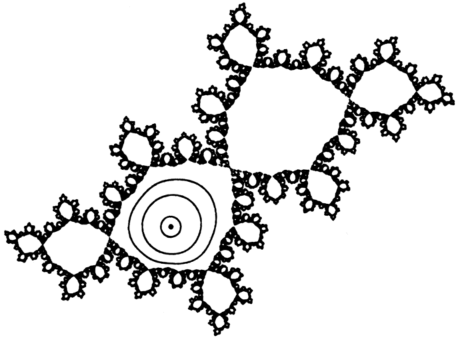


図 5.2　ジーゲル円板の例

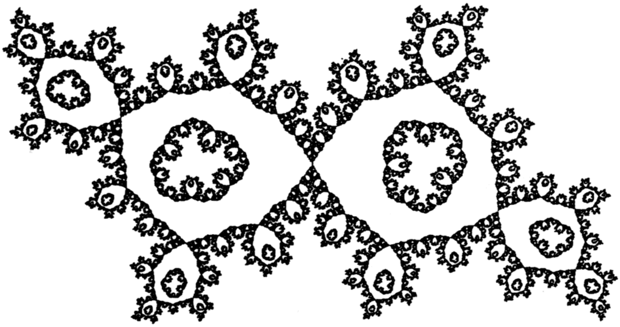


図 5.3　エルマン環の例

り $h_k(z)$ は Δ 上局所的には一様有界である。したがってモンテルの定理より $\{h_k(z)\}$ は Δ 上で、したがって $\{F_k(z)\}$ も U 上で正規族である。

さて ζ の近傍での $R(z)$ のテーラー展開は

$$R(z) - \zeta = e^{2\pi i\theta}(z - \zeta) + O(|z - \zeta|^2) \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

の形で、自然数列 $\{m_k\}$ で $\lim_{k\to\infty} e^{m_k 2\pi i\theta} = 1$ となるものが取れる。さらに、$\{F_{m_k}(z)\}$ が U 上広義一様収束するとしてよいが、その極限を $F(z)$ とすると、$F(z)$ は定数関数 1 であるか、（フルヴィッツの定理より）単葉関

数である。一方仮定より、

$$F(R(z)) = \lim_{k\to\infty} \frac{R(R^{m_k}(z)) - \zeta}{R^{m_k}(z) - \zeta} F(z) = e^{2\pi i\theta} F(z)$$

である。したがって $F(z)$ は定数関数 1 ではあり得ず、単射としてもやはり同式から

$$R^{m_k}(z) = F^{-1}(e^{m_k 2\pi i\theta} F(z)) \to z$$

となり、ζ に収束しない。これは仮定に反する。　（証明終わり）

定義　3., 4. の場合の D をそれぞれ**ジーゲル円板**、**エルマン環**と呼ぶ。

例 5.8　ジーゲル円板もエルマン環も実際に生じる例がある（図 5.2, 5.3 も見よ）。

一方、有理関数の場合にはさらに次の定理が成り立つ。

定理 5.52 (第二基本定理)　有理関数は遊走領域を持たない。

証明の概略は 6 章で与えるが、この定理を認めると次の結果を得る。

系 5.53　有理関数のファトウ集合の任意の弧状連結成分は前周期的である。

以上で有理関数の与える力学系に関する複素数の行動分析は定性的にはひとまずの結論が得られたと言える。

5.9　演習問題

1) 有限な点 α に対し $\{0 < |z-\alpha| < r\}$ で正則で、α で k 位の極を持つ関数 $f(z)$ に対しては

$$\mathrm{Res}_\alpha f(z) = \lim_{z\to\alpha} \frac{\{(z-\alpha)^k f(z)\}^{(k-1)}}{(k-1)!}$$

であることを示せ。

2) ルーシェの定理を用いて、代数学の基本定理を示せ。

3)

$$z^4 - 5z + 1 = 0$$

は、$\{1 < |z| < 2\}$ に3個の解を持つことを示せ。

4)

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+2}dx$$

を留数計算で求めよ。(指針：上半平面で

$$\frac{\log z}{z^2+2}$$

を考えよ。)

5)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

を留数計算で求めよ。(指針：上半平面で

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

を考えよ。)

6)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\sin\theta} \qquad (a > 1)$$

を留数計算で求めよ。(指針：単位円板で

$$\frac{2}{2azi + z^2 - 1}$$

を考えよ。)

7)

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x}dx \qquad (-1 < a < 0)$$

を留数計算で求めよ。(指針：全平面から非負の実軸を除いた領域で

$$f(z) = \frac{z^a}{(1+z)}$$

を考えよ。)

8) 領域 D 上の連続関数の族 $\mathcal{F}$ が D の各点の近傍で正規族であるとき、D 上でも正規族であることを示せ。

9) 複素関数の族 $\{az+b \mid a,b\in\mathbb{C}\}$ はいかなる領域上でも正規族ではないことを示せ。

なお、その一部 $\{z+b \mid b\in\mathbb{C}\}$ は $\mathbb{C}$ 上（リーマン球面への写像として）正規族である。ではリーマン球面上の関数の族としてはどうか。

10)* 一辺の長さが 2 で原点中心の閉正方形の内部から

$$[0,1]\cup\left(\bigcup_k\{z \mid \operatorname{Im}z=1/k,\ \operatorname{Re}z\in[0,1]\}\right)$$

を除いた単連結領域のリーマン写像の逆写像は単位円板の閉包には連続に拡張できないことを示せ。

11)*

$$e^{f(z)}+e^{g(z)}=1$$

を満たす非定数整関数 $f(z)$ と $g(z)$ は無いことを示せ。

12)# 多項式 $P(z)$ に対し、

$$N_P(z)=z-\frac{P(z)}{P'(z)}$$

を $P(z)$ に対する**ニュートン関数**と呼ぶ。($P(z)=0$ の解を求めるために $N_P(z)$ の反復合成を用いる方法は**ニュートン・ラフソン法**と呼ばれている。)

このとき、$P(z)=0$ の解は $N_P(z)$ の（超）吸引的固定点であることを示せ。

13)

$$\frac{\pi}{\sin\pi z}=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2z}{z^2-k^2}$$

が成り立つことを示せ。一方

$$\frac{\pi}{\sin\pi z}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{z-k}$$

とは表示できない。なぜか。

14) 閉長方形の内部を上半平面上に等角写像する関数は、複素平面上の二重周期を持つ有理型関数に拡張できることを示せ。(この関数を **ヤコビの楕円関数**と呼ぶ。)

15) 複素平面上二重周期 ω_1 と ω_2 $(\mathrm{Im}\,\omega_2/\omega_1 > 0)$ を持つ有理型関数が、$0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ を頂点とする閉平行四辺形内に重複度を込めて高々一つの極しか持たなければ定数関数であることを示せ。

16)# $\omega_1 = 1$ かつ $\omega_2 = i$ のとき、$c = g_2/4$ として

$$\wp((1+i)z) = -\frac{i}{2}\frac{\wp(z)^2 - c}{\wp(z)}$$

が成り立つことを示し（ラッテの例での議論と同様にして）

$$R(z) = -\frac{i}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

のファトウ集合が空集合であることを示せ。

17)* 恒等変換を除き楕円型変換のみからなるクライン群は有限群であることを示せ。

第 6 章 補遺*

一つの救いは、タイヒミュラーが学術論文内では、人種的な中傷を加えはしなかったことである。これは彼にとって、数学に対する敬愛のほうがナチズムの偏見より深いものであったことを示している。

アールフォルス他

世間というものは、個人ではなかろうかと思いはじめてから、自分は、今までよりは多少、自分の意思で動くことが出来るようになりました。

『人間失格』太宰治

20 世紀初頭の Poincaré や Koebe らによる一意化定理は、Klein らが取り組んだ「タイル貼り」の研究と Riemann に端を発する「多様体」の研究との間の融合を可能にした。この定理により、リーマン面という複素構造の多様性を測れという Riemann の「モデュライの問題」は、代数的に与えられた変換群の下でのタイルの多様性という、より具体的な問題とも置き換え可能となる。この方面の研究にとっての一つの道標を確かに築いたと言える第二次世界大戦真っ只中の Teichmüller の研究は、戦後 Ahlfors らによりその基盤が整備され、20 世紀後半に起こる Thurston、Sullivan、Douady、McMullen らによる華々しい新展開を待つこととなる。

が、本書の物語はその前で終わろう。

6.1 一意化定理とモデュライの問題

本節では一意化定理を解説するが、特殊だが十分有用な普遍被覆面の場合に重点を置く。

まず、**解析接続**とは、「二つの円板上で与えられた正則関数が、円板の共通部分で一致していれば、それらは同じ正則関数の一部と見なせる」という

ことである。ここで、その正則関数が等角写像であれば、それらは円板の貼り合わせとも思える。(言いかえれば、縁を貼るタイル貼りではなく「のりしろ」での貼り合わせを考えることであり、その貼り合わせかたが「正しい」ということを正則性で定義するのである。)

例えば対数関数の断片（分枝）が与えられたとき、可能な限り解析接続することにより、その定義されるべき「全域」が得られるが、それはもはや平面領域ではなく、円板が貼り合わさったものの総体と考えなければならない。このような「定義域」が自然なものであるというのが、リーマンの卓見であり、リーマン面と呼ばれる「1次元複素多様体」の概念が誕生する契機となったのである。

以上の考察を数学的に述べると、次の定義を得る。

定義　連結な位相空間[1] X の各点 p に対し、その適当な近傍 U_p の複素平面の中への同相写像 $f_p : U_p \to D_p = f_p(U_p)$ で、条件「$U_p \cap U_q$ が空集合でないとき、その各連結成分 U に対し、$f_q \circ f_p^{-1}$ は $f_p(U)$ の正則写像である」を満たすものが与えられたとき、X は1次元**複素構造**を持つ[2]といい、そのような構造を持つ X を**リーマン面**という。また、各 $f_p : U_p \to D_p$ を p での**局所座標**と呼ぶ。

リーマン面 X 上の連続な複素関数 $f(p)$ は、X の各局所座標 f_p に対し $f \circ f_p^{-1}(z)$ が D_p 上正則（有理型）関数であるとき、正則(有理型）であるという。特に、X 上の単射正則関数を X から（像領域へ）の**双正則写像**と呼ぶ。リーマン面の間の正則写像や双正則写像も同様に定義できる。

例 6.1　任意の平面領域は(局所座標として恒等写像を取ることにより）複素構造を持ち、リーマン面である。

リーマン球面は、さらに無限遠点の近傍 U_∞ として

$$\{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$$

を取り、$f_\infty(z) = 1/z$ とすることで、リーマン面となる。

---

[1] 位相空間の基礎はこの章では仮定する。本節であつかう位相空間論の詳細については例えば、小島定吉著『トポロジー入門』(共立出版）を参照せよ。
[2] 厳密には同値類を考えなければならない。

定義　領域 D 内の二つの曲線が互いに D 内で連続変形可能であるという関係は同値関係で、この同値関係による曲線 C の同値類を**連続変形類（ホモトピー類）**と呼び、$[C]_D$ で表す。

リーマン球面の任意の部分領域 D の位相的普遍被覆面 $\tilde{D}$ とは、基点 $z_0 \in D$ からの任意の曲線の連続変形類 $[C]_D$ とその終点 z_C の対 $([C]_D, z_C)$ 全体に次のように位相を導入したものである。まず、z_C 中心の D に含まれる円板 U を固定する。その任意の点 w と、z_0 と w を結ぶ D 内の線分 C に z_C から w までの線分を加えた曲線 C_w の連続変形類との対 $([C_w]_D, w)$ 全体の集合を $\tilde{U}$ とする。このとき、$\tilde{D}$ の点 $([C]_D, z_C)$ の近傍を、適当な円板 U に対するこのような $\tilde{U}$ を含む集合であると定義する。さらに、自然な連続写像

$$\pi_D : ([C]_D, z_C) \to z_C$$

を**普遍被覆射影**と呼ぶ。

ここで（$\tilde{D}$ の位相は π_D が局所的に同相写像になるように定義されているので）$p \in \tilde{D}$ での局所座標 f_p として、π_D の（十分小さい）開近傍 $\tilde{U}_p$ への制限を取れば $\tilde{D}$ の複素構造が得られる。すなわち、$\tilde{D}$ はリーマン面で π_D は正則関数となる。このリーマン面 $\tilde{D}$ を D の**普遍被覆面**と呼ぶ。

定義　リーマン面 X が**単連結**であるとは、X 内の基点 z_0 から他の点 z への任意の二つの曲線が常に同じ連続変形類に属することである。

課題　リーマン面 X が単連結であることは、X 内の z_0 を通る任意の閉曲線が退化曲線であることと同値であることを示せ。

また、上定義での普遍被覆面が単連結であることを示せ。

注意　通常は、被覆面を一般に定義し、特に単連結な被覆面を普遍被覆面と呼ぶ。その場合でも、普遍被覆面は（双正則写像でうつり合うという意味で）一意的に定まる。

例 6.2　$\hat{\mathbb{C}}$ の普遍被覆面はそれ自身とみなせ、普遍被覆射影としてはメビウス変換が取れる。

例 6.3　$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ の普遍被覆面は $\mathbb{C}$ とみなせ、普遍被覆射影として指数関数が取れる。

例 6.4　$\Omega = \mathbb{C} - \{0, 1\}$ の普遍被覆面は上半平面とみなせ、5章4節で構成したモデュラー関数 $\lambda(z)$ は Ω に対する普遍被覆射影である。

定理 6.1 (持ち上げ可能性定理)　単連結リーマン面 X から、リーマン球面内の領域 D への連続写像 $f(p)$ に対し、X から D の普遍被覆面 $\tilde{D}$ への連続写像 $\tilde{f}(p)$ で

$$f(p) = \pi_D \circ \tilde{f}(p)$$

を満たすものが存在する。

この $\tilde{f}(p)$ を $f(p)$ の**持ち上げ**と呼ぶ。

[証明]　まず基点 $p_0 \in X$ の像 $f(p_0)$ を D の基点とする。このとき

$$\tilde{f}(p) = ([f(C(p))]_D, f(p))$$

とおけばよい。ここで、$C(p)$ は p_0 と p を X 内で結ぶ曲線であるが、仮定より $[f(C(p))]_D$ は $C(p)$ の取りかたによらない。　（証明終わり）

また、次のポアンカレ・クライン・ケーベによる一意化定理は基本的である[3]。

定理 6.2 (一意化定理)　単連結リーマン面（特にリーマン球面の任意の部分領域 D の普遍被覆面）X は、以下のいずれかと双正則同値である。

1. リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$
2. 複素平面 $\mathbb{C}$
3. 単位円板 Δ

ここで、2つのリーマン面 X と X' が**双正則同値**であるとは、X から X' の上への双正則写像が存在することとする。

系 6.3　補集合が2点以上からなる平面領域 D の普遍被覆面は単位円板 Δ と双正則同値である。特に D には双曲距離が定義でき、D は単位円板 Δ の双曲タイル貼りとして表現できる。

---

[3] 一意化定理を含んだリーマン面論の書物はいくつか有るが、手に入らないものも多い。ここでは及川廣太郎著『リーマン面』（共立出版）と、一意化定理の証明に絞って解説してある、戸田暢茂著『リーマン面』（サイエンス社）を挙げておく。

[証明]　補集合が2点以上からなる平面領域 D の普遍被覆面が、平面全体と双正則同値であるとする。このとき普遍被覆射影は正則で、仮定から2点以上を値に持たないから、ピカールの小定理より定数になり矛盾である。

（証明終わり）

次に D に適当な切れ目を入れた単連結領域を考え、$\tilde{D}$ を π_D によるそれらの切れ目の逆像で切断する。こうして得られた各々の弧状連結成分は D に切れ目を入れた単連結領域と双正則同値になる。したがって、$\tilde{D}$ の一種の「双正則タイル」貼りができる。

定義　上述の「双正則タイル」の貼り合わせ変換から生成される群を、$\tilde{D}$ の**普遍被覆変換群**という。

普遍被覆変換群は、**基本群**（基点からの閉曲線の連続変形類全体のなす群）と同型である。

命題 6.4　普遍被覆面が単位円板 Δ と双正則同値であるとき、普遍被覆変換群は楕円型元を含まないフックス群 ($\subset \mathrm{M\ddot{o}b}(\Delta)$) である。

ここである意味で同等な平面領域（一般にはリーマン面）がどのくらい多様な複素構造を持つか、ということが問題になる。これをリーマンの**モデュライの問題**という。ここでは、「モデュライ」の具体的なパラメータ表現を問題にし、そのようなパラメータを**変容係数**と呼ぶことにする。

例 6.5 (円環の変容係数)　円環 $R_t = \{1 < |z| < t\}$ $(1 < t < \infty)$ が同様の円環 $R_{t'}$ と双正則同値であるとき（かつそのときに限り）$t = t'$ である。

したがって、パラメータ t が単一でこのような領域族の（実）変容係数となる。

例 6.6 (楕円関数の変容係数)　ヴァイエルシュトラスのペー関数 $\wp(z)$ に対し、

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \zeta$$

と正規化し、ζ は上半平面を動くとしてよい。実際、平面の相似変換で元の格子点集合を、そのような1と ζ の対から得られる格子点集合と一致させることができる。

このとき、5章4節のモデュラー関数 $\lambda(\zeta)$ が ζ の関数として定義できる(あるいは、対応する方程式 $x^3 - g_2x - g_3 = 0$ の解 e_1, e_2, e_3 と ∞ の非調和比

$$\lambda(\zeta) = (e_1, e_2, e_3, \infty) = \frac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3}$$

として直接にも定義できる)。

ここで ζ が変化することは、一般には平行4辺形タイルが変化することだから、対応するトーラス（章末の演習問題3を参照せよ）が変化することを意味する。したがって、モデュラー関数がトーラスの族の複素変容係数となる。

なお正確には、トーラスの双正則同値類は、

$$\tilde{\lambda}(\zeta) = \frac{(\lambda(\zeta)^2 - \lambda(\zeta) + 1)^3}{\lambda(\zeta)^2(\lambda(\zeta) - 1)^2}$$

という変容係数で決定できるが、これは $PSL(2, \mathbb{Z})$ の保型関数、すなわち、$PSL(2, \mathbb{Z})$ のタイル貼りに対応している[4]。

次に、リーマン球面から有限個の点を除いた領域の変容係数については容易である。

定理 6.5 リーマン球面から $n\,(\geq 3)$ 個の点を除いた領域 Σ_n の族は $n-3$ 個の複素変容係数で表現される。

[証明] このような領域間の双正則写像がメビウス変換に限ることから、3点が正規化できる。 (証明終わり)

トーラスはリーマン球面に1個の取っ手を付けた面に同相である。さらに、リーマン球面に $g\,(\geq 2)$ 個の取っ手を付けた面に同相なリーマン面を、**種数 g の閉リーマン面**と呼ぶ。

定理 6.6 種数 $g\,(\geq 2)$ の閉リーマン面の族は、$3g-3$ 個の複素変容係数で表現される。

---

[4] この ζ と $\tilde{\lambda}$ との変容係数の取りかたの違いが、「モデュライ空間」と「タイヒミュラー空間」との違いであるが、これ以上は立ち入らない。

[証明]　直観的には、次のように理解できる。まず、そのような面 X の基点を固定すると、そこからの $2g$ 個の互いに基点以外では交わらず互いに連続変形もできない適当な閉曲線で X を切断するとき、その普遍被覆面 Δ での逆像の各々が X に対応する双曲タイルを与える。そのようなタイルを貼り合わせるのには、$2g$ 個の被覆変換群（フックス群）の元（メビウス変換）で十分である。それらの各元は $PSL(2,\mathbb{R})$ の元として、3 個の実係数で決定できる。さらに全体としてのメビウス変換での共役の自由度で 3 個、うまくタイルができるための関係式でさらに 3 個少なくなり、結局 $6g-6$ 個の実係数、したがって $3g-3$ 個の複素係数で X を決定できる。（ただし、「自然」な複素係数を与えることは、そう容易ではない。）　（証明終わり）

最後に興味深い（そして極めて正統的な）事実は、これら変容係数の個数が適当な「正則 2 次微分」全体のなす線型空間の次元であるということである。

定義　リーマン面 X 上の**正則（有理型）2 次微分**（あるいは 2 次微分形式）$q=q(z)dz^2$ とは、X の各局所座標 f_p に対し、$D_p=f_p(U_p)$ 上正則（有理型）な関数 $q(z)=q_{D_p}(z)$ で、$\phi(z)=f_{p'}\circ f_p^{-1}(z)$ が定義できるときには常に $f_p(U_p\cap U_{p'})$ 上で

$$q_{D_p}(z)=q_{D_{p'}}(\phi(z))\phi'(z)^2$$

が成り立つものである。（すなわち、X の各点に対して値が与えられた関数ではなく、各局所近傍に対して関数が与えられ、かつその変換規則が定まっている対象である。）このとき、X の各点 p_0 に対し、どの局所座標による像 $z_0=f_p(p_0)$ での $q_{D_p}(z)$ の零点や極の位数も同じで、零点の場合にはその値、極の場合にはマイナスを付けた値、を簡単のため、z_0 での q の位数と呼び $\operatorname{ord}_{z_0} q$ で表す。

リーマン面 X 上の有理型 2 次微分全体のなす複素線型空間を $\mathcal{M}(X)$ とする。また、高々 1 位の極しか持たない元全体のなす部分空間を $\mathcal{Q}(X)$ で表す。さらに、X 上の有理型 2 次微分 q のノルムを

$$\|q\|_X=\int_X |q|=\int_X |q(z)|dxdy \qquad (z=x+iy)$$

で定義し、有限なノルムを持つとき、**可積分**であるという。ここで、q から定まるこの $|q|$ は q に付随する面積要素と呼ばれ、$\phi(z) = f_{p'} \circ f_p^{-1}$ が定義できるときには常に $f_p(U_p \cap U_{p'})$ 上で

$$|q|_{D_p}(z) = |q|_{D_{p'}}(\phi(z))|\phi'(z)|^2$$

が成り立つものである。(特に、上記のノルムは局所座標の選びかたによらずに定まる。)

命題 6.7　リーマン球面から n (≥ 3) 個の点を除いた領域 Σ_n 上の可積分な正則2次微分全体は $n-3$ 次元の複素線型空間をなす。

また、種数 $g(\geq 2)$ の閉リーマン面上の正則2次微分全体は $3g-3$ 次元の複素線型空間をなす。

[証明]　前半の主張は、問題の空間が、除かれた点で高々1位の極を持つような正則2次微分全体の空間と一致する（章末の演習問題5を参照）ことから容易にわかる。

後半で求めるべき次元は、正則2次微分 q を一つ取るとき、その零点集合でのみ極を持ち、その各点における極の位数がその点での q の零点の位数を越えないような有理型関数全体の空間の次元に等しい。後者の次元が $3g-3$ であることは、リーマン・ロッホの定理という古典的な次元公式からわかる[5]。

（証明終わり）

6.2　有理関数のファトウ集合再論

与えられた次数の有理関数全体が有限個のパラメータで表現できることは明らかである。例えば次数 d の場合には、多項式の商で表したときの係数を考えるなら、高々 $2d+1$ 個で十分である。さらにメビウス変換による共役類を考えるなら $2d-2$ 個で十分である。この主張は、次の事実からも暗示される。

---

[5] リーマン・ロッホの定理等を含む閉リーマン面論の解説としては、絶版ではあるが楠幸男著『函数論』(朝倉書店) の第5章が平易かつ簡潔である。同書はまた、リーマン面に関する豊富な情報も含んでいる。

命題 6.8 次数 d の有理関数の分岐点（局所的にも双正則写像でない点）は重複度を込めて $2d-2$ 個である。

[証明] 有理関数 $R(z)$ が無限遠点に分岐点を持たないとして、R' の零点の個数を数えれば良い。 （証明終わり）

さて、次の定理のエプシュタインによる証明の概略を述べる。

定理 6.9 (ファトウ・宍倉の評価式) 次数 d の有理関数 の異なる（超）吸引的周期点系と中立的周期点系の個数の和は $2d-2$ を越えない。

証明のため、$R(z)$ はラッテ型（5.6 節に述べたようなトーラスの自己被覆写像に対応する有理関数）ではないとする。（そのときはすべての周期点は反発的なので主張は成り立つ。）また、いくつか記号を定義する。

定義 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の有理型 2 次微分 q と、次数 d の有理型関数 $R(z)$ に対し、q の $R(z)$ による **引き戻し** R^*q を

$$R^*q(z) = q(R(z))R'(z)^2$$

で定義する。

また、q の $R(z)$ による**送り出し** R_*q は、$R(z)$ の逆関数のすべての分枝 ϕ に関する引き戻しの和（まず分岐値、すなわち分岐点の像を除いて定義され、分岐値にも自然に拡張されたもの）で定義する。標語的に書けば

$$R_*q(z) = \sum_{\phi\in\{R^{-1}\}} \phi^*q$$

である。

課題 次式を示せ。ただし、z での $R(z)$ の局所次数 $\deg_z R$ とは z の近傍での $R(z)$ の葉数[6]である。

$$\operatorname{ord}_z R^*q = \deg_z R\cdot(\operatorname{ord}_{R(z)}q+2)-2$$

$$\operatorname{ord}_z R_*q \geq \min_{w\in R^{-1}(z)}\left(\frac{\operatorname{ord}_w q+2}{\deg_w R}-2\right)$$

---

6 z の近傍が $R(z)$ の近傍を n 重に覆うとき、葉数を n とする。局所構造定理（命題 3.57 ）を見よ。

上不等式から特に、R^* も R_* もともに、$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ の自己線型写像を与える。さらに $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\hat{\mathbb{C}})$ に制限しても、その自己線型写像となる。

さて、

$$\nabla q = q - R_* q$$

は $\mathcal{M}$ の自己線型写像を与えるが、特に $R(z)$ の超吸引的でない任意の周期点系 $\langle\alpha\rangle = \{R^k(\alpha)\}$ に対して、$\langle\alpha\rangle$ が無限遠点を含まないとして

$$q_{\langle\alpha\rangle} = \sum_{\alpha' \in \langle\alpha\rangle} \frac{dz^2}{(z-\alpha')^2}$$

と定義する。さらに各（超吸引的でない）吸引的周期点系あるいは中立的周期点系 $\langle\alpha\rangle$ に対する $q_{\langle\alpha\rangle}$ 全体で生成される複素線型空間を $S(R)$ とすると、定義から直接計算により次の主張を得る。

補題 6.10　∇ による $S(R)$ の像は $\mathcal{Q}$ に含まれる。

定義　$R(z)$ の周期点系 $\langle\alpha\rangle$ における $q \in \mathcal{M}$ の**力学系的留数**を

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_{\langle\alpha\rangle}(R, q)\\ =&\frac{1}{2\pi}\left(\int_{R(U)-U} |q| - \int_{U-R(U)} |q| - \int_U (R^*|q| - |q|)\right)\end{aligned}$$

で定義する。ただし $U \supset \langle\alpha\rangle$ とする。

補題 6.11　周期移点系 $\langle\alpha\rangle$ が超吸引的でなければ、その周期を p として

$$\mathrm{Res}_{\langle\alpha\rangle}(R, q_{\langle\alpha\rangle}) = \log|(R^p)'(\alpha)|$$

である。

[証明]　α が固定点であり、α で $R(z)$ が線形化可能であるときは、線形化座標を取れば、

$$\mathrm{Res}_{\langle\alpha\rangle}(R, q_\alpha) = \int_1^{|R'(\alpha)|} \frac{dr}{r}$$

であることが定義からわかる。そうでない場合にも、より精密な議論で $R(z)$ による「出入」が相殺することが示せる。　（証明終わり）

補題 6.12 （$R(z)$ がラッテ型でなければ）$\hat{\mathbb{C}}$ 上の有理型 2 次微分 $q \neq 0$ で $\nabla q = 0$ となるものに対し、「散逸量」

$$\mathrm{Dec}(R,q) = \int_{\hat{\mathbb{C}}} (R_*|q| - |R_* q|)$$

は常に正値となる。

[証明]　まず､定義より $\mathrm{Dec}(R,q) \geq 0$ である。そこで仮定の下で、$\mathrm{Dec}(R,q) = 0$ とする。

分岐値を含まない任意の円板 U を固定し、$R(z)$ の逆写像の分枝 $\phi : U \to \hat{\mathbb{C}}$ を選ぶと、他の分枝 $\psi : U \to \hat{\mathbb{C}}$ に対して、

$$|\phi^* q + \psi^* q| = |\phi^* q| + |\psi^* q|$$

が成り立たなければならないから、有理型関数 $\phi^* q / \psi^* q$ は実数値関数となり、定数である。したがって U 上で、$R_* q = c\phi^* q$ となり、U は任意より、全体で

$$R^* R_* q = cq$$

である。さらに、$d \cdot R_* q = R_*(cq)$ より $d = c$ である。

したがって、$\nabla q = 0$ から $R^* q = dq$ を得るが、これが不可能であることを示そう。

実際、$R^* q = dq$ から

$$\mathrm{ord}_z R^* q = \mathrm{ord}_z q$$

でなければならないが、位数が満たす不等式からは q の位数 2 以上のすべての極とすべての零点の集合 E が $R^{-1}(E) \subset E$ を満たすことがわかる。このとき E は完全不変で高々 2 点からなり、空集合でなければ高々周期 2 の超吸引的周期点からなる。

しかしその場合には c が d^2 または d^4 でなければ q は極を持ち得ないことが計算で示せる。したがって E は空集合で q は零点を持たず 1 位の極のみを持つ。このとき q の極の個数は 4 で、$R(z)$ はラッテ型でなければならない（章末の演習問題 6 を参照せよ）。　（証明終わり）

以上から次の事実が示せる。

補題 6.13　$\hat{\mathbb{C}}$ 上の有理型 2 次微分 q で各周期点系 $\langle\alpha\rangle$ に対し

$$\mathrm{Res}_{\langle\alpha\rangle}(R, q) \leq 0, \qquad \nabla q = 0$$

を満たすものは 0 に限る。

[証明]　$\nabla q = 0$ となる q が 2 位以上の極を持つ点の集合 E は有限個の超吸引的でない周期点系からなることが定義からわかる。そこで E の各点 α 中心の小円板 U_α を分岐値を含まないようにかつ互いに共通点を持たないように選び、その和集合を U とする。また、$R(z)$ の逆写像からなる U の写像 ϕ を $\phi(E) = E$ かつ

$$U \cap R^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in E} U_\alpha \cap \phi(U_{R(\alpha)})$$

が成り立つように選ぶ。

さて、$R_*|q| - |R_*q|$ は可積分である。これは U の補集合では明らかで、U 上では R^{-1} の分枝の集合を $\{R^{-1}\}$ と表すとき

$$R_*|q| - |R_*q| = (\phi^*|q| - |R_*q|) + \sum_{\psi \in \{R^{-1}\} - \{\phi\}} \psi^*|q|$$

かつ、

$$|\phi^*|q| - |R_*q|| \leq \sum_{\psi \in \{R^{-1}\} - \{\phi\}} \psi^*|q|$$

であることからわかる。

さらに $|q| - R_*|q|$ も可積分で、

$$\int_{\hat{\mathbb{C}}} (|q| - R_*|q|) = \int_{\hat{\mathbb{C}} - U} (|q| - R_*|q|) + \int_U (|q| - R_*|q|)$$

において、右辺第 1 項は

$$\left(\int_{\hat{\mathbb{C}}-U} - \int_{\hat{\mathbb{C}}-R^{-1}(U)}\right)|q|$$
$$= \left(\int_{R^{-1}(U)-\phi(U)} + \int_{\phi(U)-U} - \int_{U-\phi(U)}\right)|q|$$

と、第 2 項は

$$\int_U (|q| - \phi^*|q|) - \int_{R^{-1}(U)-\phi(U)} |q|$$

と変形できるから、辺ごとに加えれば

$$\int_{\hat{\mathbb{C}}} (|q| - R_*|q|) = 2\pi \sum_{\langle\alpha\rangle\subset E} \mathrm{Res}_{\langle\alpha\rangle}(\phi, q) = -2\pi \sum_{\langle\alpha\rangle\subset E} \mathrm{Res}_{\langle\alpha\rangle}(R, q)$$

が得られる。したがって

$$\begin{aligned} 0 &= \|\nabla q\| \geq \left|\int_{\hat{\mathbb{C}}}(R_*|q| - |R_*q|) + \int_{\hat{\mathbb{C}}}(|q| - R_*|q|)\right| \\ &= \left|\mathrm{Dec}(R, q) - 2\pi \sum_{\langle\alpha\rangle\subset E} \mathrm{Res}_{\langle\alpha\rangle}(R, q)\right| \end{aligned}$$

が成り立つので、仮定と前補題より $q = 0$ でなければならない。

（証明終わり）

系 6.14

$$\nabla : S(R) \to \mathcal{Q}$$

は単射線型写像である。

[証明]　$S(R)$ の元 q に対しては、すべての周期点系 $\langle\alpha\rangle$ に対して

$$\mathrm{Res}_{\langle\alpha\rangle}(R, q) \leq 0$$

であった。したがって q が $\nabla q = 0$ を満たせば $q = 0$ でなければならない。

（証明終わり）

さて、

$$\nabla : S(R) \to \mathcal{Q}$$

は商空間 $\mathcal{Q}/\nabla\mathcal{Q}$ への単射でもある。

ここで有限集合 A として、非反発的周期点系からなる適当な有限集合と、分岐点の軌道の最初の部分で、異なる軌道でやがて一致するものについては一致するまでの軌道の元をすべて含む有限集合と、の和集合を取る。さらに $\mathcal{Q}$ の元で A 内にのみ極を持つもの全体からなる部分空間を $\mathcal{Q}_A$ とし、$S(R)_A = \{q_{\langle\alpha\rangle} \mid \langle\alpha\rangle \subset A\}$ とするとき、∇ は $S(R)_A$ から

$$\mathcal{Q}_{A^+}/\nabla\mathcal{Q}_A$$

への単射でもある。ただし $A^+ = A \cup R(A)$ である。したがって、

$$\dim_{\mathbb{C}} S(R)_A \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{A^+} - \dim_{\mathbb{C}} \nabla\mathcal{Q}_A \leq \#(A^+ - A)$$

である。このような任意の A に対し、この右辺に超吸引周期点の数を加えても分岐点の個数 $2d-2$ を越えないのでファトウ・宍倉評価式が得られた。

注意　実は、次数 d の有理関数 $R(z)$ に対するファトウ・宍倉不等式の左辺にエルマン環の系の個数の2倍を加えても $2d-2$ を越えない。したがって $R(z)$ の周期成分系の個数も $2d-2$ を越えない。さらに、エルマン環の系の個数は $d-2$ を越えないという宍倉評価式もある。特に、2次の有理関数はエルマン環を持たない。

一方、ファトウ集合の点はいつか周期成分にうつる。すなわち次の定理が成り立つ。

定理 6.15 (第二基本定理)　有理関数は遊走領域を持たない。

証明のために、まず次の補題を示す。

補題 6.16　遊走領域があれば、軌道内の各領域が単連結で分岐点を含まないような遊走領域がある。

[証明]　有理関数 $R(z)$ が遊走領域 D_0 を持つとする。$R(z)$ の分岐点の個数は有限個だったから、適当な像 $D_1 = R^N(D_0)$ はその軌道内に分岐点を含まないとしてよい。このとき D_1 が単連結なら その軌道の各領域も単連結である。

そこで D_1 が単連結でないとすると、D_1 内には 1 点に連続変形できないジョルダン閉曲線 C_1 がある。このとき、任意の $C_{k+1} = R^k(C_1)$ も $D_{k+1} = R^k(D_1)$ 内で 1 点に連続変形できない。

一方、C_k の（球面距離に関する）直径は 0 に収束する。実際、そうでないとすると $\{R^k(z)\}$ のある部分列 $\{R^{k'}(z)\}$ は D_1 上で定数でない正則関数 g に収束しなければならないが、このとき $g(D_1)$ は領域である。そこでその内点 z_0 を取ればルーシェの定理より十分大きい k' に対し $R^{k'}(D_1)$ も z_0 を含まねばならず、遊走領域であることに反する。

特に、D_1 を適当な D_k で置き換えて、C_k の直径は十分小さいとし、C_k の補集合の弧状連結成分で半球面を含むものがあるとしてよい。それを H_k とし、H_k の閉包の補集合を B_k とする。有理関数は球面距離に関してリプシッツ連続であるので、C_k の直径が十分小さければ $R(B_k)$ も半球面に真に含まれる。$R(B_k)$ の境界が $R(C_k)$ に含まれることから $R(B_k) \subset B_{k+1}$、すなわち $R^k(B_1) \subset B_{k+1}$ となる。特に B_1 の軌道は十分先からは $D_1 \cap H_1$ を含み得ないので R^k は B_1 の内部で正規族になるが、これは B_1 が J_R と交わることに反する。（証明終わり）

さて、有理関数をこのような遊走領域上で変形することを考える。そのため、局所的に一方向へ領域を引き伸ばす。このような引き伸ばしも正則 2 次微分を用いて定式化される。

定義　正則 2 次微分 q は、その零点でない任意の点 z の十分小さい（零点を含まない）近傍 U_z で、適当な双正則写像 ϕ を選べば

$$q(z) = (\phi'(z))^2$$

の形に表せる。ϕ は ± 1 倍を除き定まる。二つのこのような近傍 U_1 と U_2 の重なった部分では、それぞれに対応する $\phi_1(z)$ と $\phi_2(z)$ の間には

$$\phi_1(z) = \pm\phi_2(z) + c$$

の関係がある。これを（q に対し）**許容された局所座標系**という。

さらに領域 D 上の**正則 2 次微分** q **に付随する** D **の擬等角変形**とは、D 上の任意の許容された局所座標 $w = \phi(z) = u + iv$ を新しい局所座標

$$Ku + iv$$

で置き換えて得られる D 上の複素構造のことをいう。また、新しい複素構造によるリーマン面の適当な平面領域 D' への双正則写像を $\Phi(z)$ とするとき、写像 $\Phi(z)$ は D から D' への同相写像とも見なせる。これを q **に付随する D のタイヒミュラー写像**と呼ぶ。また、D が単位円板 Δ の場合には、D' も Δ と双正則同値であり、Δ の同相な自己写像が得られる。これを q **に付随する Δ のタイヒミュラー自己写像**という。

ここで、カラテオドリの定理の証明と同様にして次の主張が示せる。

命題 6.17　Δ 上の可積分な正則 2 次微分 q に付随する Δ のタイヒミュラー自己写像は Δ の閉包の同相自己写像に拡張できる。

また、次の事実は基本的である。

命題 6.18　有理関数 $R(z)$ のファトウ集合に対し、その弧状連結成分 D_j の和集合 $U = \bigcup_j D_j$ で $R(z)$ で完全不変なものと、U 上の正則 2 次微分 q とが与えられたとする。q の各 D_j への制限 q_j に付随する D_j の擬等角変形を行って得られたリーマン面の和集合を U' とし、U を U' で置き換えたリーマン面への写像に対応する $\hat{\mathbb{C}}$ の同相自己写像を $\Phi_q(z)$ とする。$\Phi_q(z)$ が有理関数 $R(z)$ の変形を与える、すなわち

$$\Phi_q \circ R \circ \Phi_q^{-1}$$

が再び有理関数になるのは、q が $R(z)$ で不変、すなわち

$$R^* q = q$$

が U 上成り立つことと同値である。

そこで、補題 6.16 で得られた遊走領域 D に対し、その上の可積分な正則 2 次微分 q_D $(\neq 0)$ を取り、D の軌道に含まれる各弧状連結成分 D' 上の 2 次微分 $q_{D'}$ として、双正則写像 $(R^k)^{-1} : D' = R^k(D) \to D$ による q_D の引き戻しを取る。さらにこのような D' の $R(z)$ による逆像の各弧状連結成分上では、$q_{D'}$ の $R(z)$ による引き戻しで正則 2 次微分を定義する。以下

$R(z)$ による逆像上で同じ定義を繰り返せば、全体として D を含む最小の完全不変開集合 D^* 上の 2 次微分が得られる。これを q で表すとき、定義から $R^*q = q$ でこの q から $\Phi_q(z)$ を定義すれば $R(z)$ の変形が得られる。

一方、D 上の元の可積分な正則 2 次微分 q_D は、リーマン写像の逆写像で単位円板 Δ に引き戻せば、Δ 上の可積分な正則 2 次微分となる。特に、次の事実は容易にわかる。

課題　D 上の可積分な正則 2 次微分全体 $\mathcal{I}(D)$ は無限次元複素線型空間であることを示せ。

有理関数の変形できる係数の数は有限だったから、$\mathcal{I}(D)$ 内の単純曲線 $\{q_t \mid t \in [0,1]\}$ で、各 q_t に対応する $\Phi_{q_t}(z)$ による $R(z)$ の変形が

$$\Phi_{q_t} \circ R \circ (\Phi_{q_t})^{-1} = \Phi_{q_0} \circ R \circ (\Phi_{q_0})^{-1}$$

を満たすものがある。そこで

$$f_t(z) = (\Phi_{q_t})^{-1} \circ \Phi_{q_0}(z)$$

と置くと $f_0(z)$ は恒等写像で、かつ $f_t(z)$ は t について連続であることが知られているので、$R(z)$ の周期点を固定点に持つことがわかる。それらが J_R 内で稠密だから、各 $f_t(z)$ は J_R 上恒等写像であり、特に D の自己写像である。

そこで、D の同じリーマン写像により各 $f_t(z)$ の共役を取れば、q_0 の Δ への引き戻しに付随する Δ のタイヒミュラー自己写像で、各 q_t の Δ への引き戻しに付随する適当な Δ のタイヒミュラー自己写像と同じ境界値を持つものがあることがわかるので、次の定理により矛盾を得て証明が終わる。

定理 6.19 (タイヒミュラー写像の一意極値性定理)　$\mathcal{I}(\Delta)$ の異なる元に付随する Δ の任意の二つのタイヒミュラー自己写像は異なる境界値関数を持つ。

6.3　演習問題

1) 二重連結領域、すなわち補集合が二つの空でなく共有点のない連結な閉集合

からなるようなリーマン球面の部分領域は、常に同心円環への双正則写像を持つことを示せ。

2) $\hat{\mathbb{C}}$ から共有点のない有限個の閉円板を除いた領域の族に対し、その変容係数の個数を求めよ。

3) 前章のペー関数の定義にある格子点集合 Ω に対応する「双正則タイル」として、$0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ を頂点とする閉平行四辺形の内部が取れるが、このようなタイルの辺を周期に対応する平行移動で貼り合わせた集合にリーマン面の構造（複素構造）を定義せよ。（このようなリーマン面を**トーラス**と呼ぶ。）

4)* 基本群が可換群になるリーマン面は、以下のリーマン面（例外型のリーマン面）のいずれかと双正則同値であることを示せ。

1. リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$
2. 複素平面 $\mathbb{C}$
3. 単位円板 Δ
4. $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$
5. $\Delta^* = \Delta - \{0\}$
6. 円環 $\{1 < |z| < r\}$ $(1 < r < \infty)$
7. トーラス

さらに、それぞれの基本群を述べよ。

5) 任意の領域 D に対し、$\mathcal{M}(D)$ の元で、極を除いた領域で可積分なもの全体は $\mathcal{Q}(D)$ に含まれることを示せ。

6) 有理関数 $R(z)$ が、

1. 極はすべて1位で、その集合が $R(z)$ でそれ自身にうつされ、
2. 極の逆像は、また極か単純な分岐点で、
3. 任意の分岐点は極にうつされる

とき、$R(z)$ はラッテ型であることを示せ。

7) 有理関数 $R(z)$ が固定点 α を持つとき、α での力学系的留数は

$$\mathrm{Res}_\alpha\,(R^k, q) = k\mathrm{Res}_\alpha(R, q)$$

を満たすことを示せ。

索　引

谷口雅彦（たにぐち まさひこ）
京都大学大学院理学研究科助教授．理学博士．
1951 年　奈良県生まれ．
1976 年　京都大学大学院理学研究科修士課程終了．京都大学理学部助手を経て現職．
専門　複素解析．
主著　『タイヒミュラー空間論』（共著）日本評論社（1989 年），『双曲的多様体とクライン群』（共著）日本評論社（1993 年），『複素力学系序説』（共著）培風館（1995 年），『双曲幾何学への招待』（共著）培風館（1996 年）．

もう一つの函数論入門
複素数の行動分析の基礎

2002（平成 14）年 2 月 25 日　初版第一版発行

編著者　谷　口　雅　彦
発行者　佐　藤　文　隆
発行所　京都大学学術出版会
京都市左京区吉田河原町15-9
京大会館内　(606-8305)
電 話　075-761-6182
FAX　075-761-6190
振 替　01000-8-64677

印刷・製本　株式会社　太　洋　社

ISBN4-87698-438-7　定価はカバーに表示してあります
Printed in Japan